

Einführung in die Numerische Mathematik

12. Übung

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die LR -Zerlegung (ohne Pivotsuche) der folgenden Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

und lösen Sie mit Hilfe der LR -Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (2, 7, 4)^T$.

b) Zeigen Sie, dass die LR -Zerlegung einer Matrix eindeutig ist, falls die Diagonale von R aus Einsen besteht.

Aufgabe 2

Stellen Sie zu gegebenen Datenpaaren (x_i, f_i) , $i = 0, \dots, n$, $x_i \neq x_j$, für $i \neq j$, das Lagrange'sche Interpolationspolynom auf.

Aufgabe 3

Sei A eine reelle und symmetrische $n \times n$ Matrix die eine LR -Zerlegung besitzt. Existiert eine reelle Cholesky von A ? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum.

Aufgabe 4

Seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0,99 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Lösung von $Ax = b$ und die Inverse von A .

b) Für die Störung $\delta b = 10^{-3} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ der rechten Seite lösen Sie das gestörte Gleichungssystem $A\hat{x} = b + \delta b$ und bestimmen sie die Störung $\delta x = \hat{x} - x$ sowie deren Norm bzgl. $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$.

c) Erklären sie den relativen grossen Fehler δx im Vergleich zu δb .

Aufgabe 5

In einem Experiment werden folgende Messwerte $(x; y)$ ermittelt:

$$(2; 2,5) \quad (3; 3,3) \quad (5; 4,8) \quad (8; 9,5) \quad .$$

Es wird ein linearer Zusammenhang $y = ax + b$ vermutet. Bestimmen Sie die Gerade so, dass die Summe der Fehlerquadrate minimal wird. Skizzieren Sie die Messwerte und die Ausgleichsgerade.

Aufgabe 6

Berechnen Sie mit Hilfe der summierten Trapez-Regel und der summierten Simpson-Regel (jeweils 3 Teilintervalle) Approximationen an

$$\int_0^3 1 + 2x^2.$$

Was können Sie über den Fehler aussagen?

Aufgabe 7

Beschreiben Sie das Newton-Verfahren zur approximativen Berechnung von \sqrt{a} , $a \in \mathbb{R}$, *fest*.

Aufgabe 8 Beweisen sie folgenden Satz: Ist eine Matrix strikt diagonal dominant, so ist sie nichtsingulär.