

## Kontrolltheorie

### 4. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblattes in der Übung am 13.06.2006

#### Aufgabe 1: (Sylvester-Gleichung)

Zeige, dass die Sylvester-Gleichung  $AX + XB = -W$  mit  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m,m}$ ,  $W \in \mathbb{R}^{n,m}$  genau dann eine Lösung  $X$  hat, wenn die Matrizen

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & W \\ 0 & -B \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{bmatrix}$$

ähnlich sind.

#### Aufgabe 2: (Stabilität)

Berechne die Eigenwerte der Matrix

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 10 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 10 & \\ \varepsilon & & & & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

für  $\varepsilon \geq 0$ . Zeige anhand dieses Beispiels mit  $n = 20$  und  $\varepsilon = 10^{-18}$ , dass kleine Störungen in  $A_0$  zum Stabilitätsverlust führen können.

#### Aufgabe 3: (Konditionszahl der Lyapunov-Gleichung)

Die *Konditionszahl* der Lyapunov-Gleichung  $AX + XA^T = -W$  mit  $A, W \in \mathbb{R}^{n,n}$  ist definiert als

$$\kappa = 2\|A\|_F(\text{Sep}(A))^{-1},$$

wobei  $\text{Sep}(A) = \min_{\|X\|_F=1} \|AX + XA^T\|_F$  die *Separation* ist.

1. Zeige, dass  $\text{Sep}(A) = \|(I_n \otimes A + A \otimes I_n)^{-1}\|_2^{-1}$ .
2. Sei  $\tilde{X}$  die Lösung der gestörten Lyapunov-Gleichung  $\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{X}\tilde{A}^T = -\tilde{W}$  mit  $\|\tilde{A} - A\|_F \leq \varepsilon\|A\|_F$  und  $\|\tilde{W} - W\|_F \leq \varepsilon\|W\|_F$ . Zeige: Ist  $\varepsilon\kappa < 1$ , dann gilt

$$\frac{\|\tilde{X} - X\|_F}{\|X\|_F} \leq \frac{2\varepsilon\kappa}{1 - \varepsilon\kappa}.$$

#### Aufgabe 4: (Stabilisierung)

Betrachte das Steuerungsproblem einer Parabolantenne

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= \omega(t) \\ j\dot{\omega}(t) &= -r\omega(t) + ku(t)\end{aligned}$$

mit  $k, j, r > 0$ . Berechne alle stabilisierenden Zustandsrückführungsmatrizen  $F \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  für das System.