

## Kontrolltheorie

### 6. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblattes in der Übung am 11.07.2006

#### Aufgabe 1: (Hamiltonische Matrizen)

Sei  $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{2n,2n}$  und es bezeichne  $J := J_{2n}$  die Matrix

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Zeige: Folgende Aussagen sind äquivalent.

- (i) Die Matrix  $\mathcal{H}$  ist Hamiltonisch, d.h.,  $\mathcal{H}J = (\mathcal{H}J)^T$ .
- (ii) Es gilt  $\mathcal{H}^T J + J\mathcal{H} = 0$ .
- (iii) Die Matrix  $J\mathcal{H}$  ist symmetrisch.
- (iv) Es gibt  $F, G, H \in \mathbb{R}^{n,n}$  mit  $G = G^T$  und  $H = H^T$ , so dass

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} F & G \\ H & -F^T \end{bmatrix}.$$

- (v) Die Matrix  $\mathcal{H}$  ist schief-adjungiert bzgl. des indefiniten inneren Produktes

$$\langle x, y \rangle_J := y^T Jx, \quad x, y \in \mathbb{R}^{2n},$$

d.h. für alle  $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$  gilt:

$$\langle \mathcal{H}x, y \rangle_J = -\langle x, \mathcal{H}y \rangle_J$$

#### Aufgabe 2: (Isotrope invariante Unterräume)

Sei  $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{2n,2n}$  Hamiltonisch und sei

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,r}$$

mit  $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{n,r}$ , so dass die Spalten von  $X$  einen  $\mathcal{H}$ -invarianten Unterraum  $\mathcal{U}$  aufspannen, d.h., es gilt

$$\mathcal{H}X = XZ$$

für eine Matrix  $Z \in \mathbb{R}^{r,r}$ . Zeige: Liegen die zu  $\mathcal{U}$  gehörigen Eigenwerte in der linken offenen Halbebene (d.h.  $\text{Sp}(Z) \subset \mathbb{C}^-$ ), so ist  $\mathcal{U}$  *isotrop*, d.h. für alle  $x, y \in \mathcal{U}$  gilt:

$$\langle x, y \rangle_J = 0.$$

*Hinweis:* Lyapunov-Theorie.

**Aufgabe 3: (Hamiltonische und symplektische Matrizen)**

Eine Matrix  $S \in \mathbb{R}^{2n,2n}$  heißt *symplektisch*, falls  $S$  orthogonal bzgl. des inneren Produktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$  ist, d.h., für alle  $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$  gilt:

$$\langle Sx, Sy \rangle_J = \langle x, y \rangle_J.$$

a) Zeige:

(i) Die Matrix  $S$  ist genau dann symplektisch, wenn  $S^T J S = J$ .

(ii) Es gilt  $|\det(S)| = 1$ .

(iii) Die Menge der symplektischen Matrizen  $\mathcal{S}_{2n}$  mit der Matrixmultiplikation ist eine Gruppe.

b) Sei  $\mathcal{H}_{2n}$  die Menge der Hamiltonischen Matrizen und sei  $\mathcal{S}_{2n}$  die Menge der symplektischen Matrizen. Zeige:

(i) Es gilt  $S^{-1} H S \in \mathcal{H}_{2n}$  für alle  $S \in \mathcal{S}_{2n}, H \in \mathcal{H}_{2n}$ .

(ii) Falls  $H \in \mathcal{H}_{2n}$  keine rein imaginären Eigenwerte hat, dann gibt es eine komplex symplektische Matrix  $S \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{C}) = \{ S \in \mathbb{C}^{2n,2n} : S^* J S = J \}$ , so dass

$$S^{-1} H S = \begin{bmatrix} J_- & 0 \\ 0 & -J_-^* \end{bmatrix}$$

und  $J_- \in \mathbb{C}^{n,n}$  ist in Jordan-Normalform mit  $\text{Sp}(J_-) \subset \mathbb{C}^-$ .