TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 07
Institut für Mathematik Stand: 13. Juli 2007
Ferus / Garcke

Lösungsskizzen zur Klausur vom 16.07.07
Analysis II

---

1. Aufgabe

(5 Punkte)

Der metrische Raum (X, d) ist gegeben. Zeigen Sie, dass auch

$$d^*(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

eine Metrik auf X ist.

Lösung:

1. $d^*(x, y) \geq 0$ da $1 \geq 0$ und $d(x, y) \geq 0$
   $d^*(x, y) = 0 \Leftrightarrow \min\{1, d(x, y)\} = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
   $d^*(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} = \min\{1, d(y, x)\} = d^*(x, y)$ $\boxed{\text{2 Punkte}}$

2. $d^*(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} \leq \min\{1, d(x, z) + d(y, z)\}$ Fallunterscheidung:

   (a) $1 \geq d(x, z) + d(y, z) \Rightarrow 1 \geq d(x, z); 1 \geq d(y, z)$
   $\Rightarrow \min\{1, d(x, z)\} = d(x, z)$ und $\min\{1, d(y, z)\} = d(y, z)$
   Somit $\min\{1, d(x, z) + d(y, z)\} = d(x, z) + d(y, z) = \min\{1, d(x, z)\} + \min\{1, d(y, z)\} = d^*(x, z) + d^*(y, z)$

   (b) $1 \leq d(x, z) + d(y, z) \Rightarrow \min\{1, d(x, z) + d(y, z)\} = 1$

      (i) $1 \leq d(x, z), d(y, z) \Rightarrow 1 \leq 2 = \min\{1, d(x, z)\} + \min\{1, d(y, z)\} = d^*(x, z) + d^*(y, z)$

      (ii) $1 \leq d(x, z), 1 \geq d(y, z) \Rightarrow 1 \leq 1 + d(y, z) = \min\{1, d(x, z)\} + \min\{1, d(y, z)\} = d^*(x, z) + d^*(y, z)$

      (iii) analog zu (ii) $\boxed{\text{3 Punkte}}$

   Alternativ

   (a) $d(x, z) \geq 1 \implies d^*(x, z) = 1 \implies d^*(x, y) \leq 1 \leq d^*(x, z) + d^*(z, y)$.

   (b) $d(z, y) \geq 1$ analog

   (c) $d(x, z) < 1 \wedge d(z, y) < 1 \implies d^*(x, z) + d^*(z, y) = d(x, z) + d(z, y) \geq d(x, y) \geq d^*(x, y)$

---

2. Aufgabe

(6 Punkte)

a) Seien $A_1, \ldots, A_n$ kompakte Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d). Zeigen Sie, dass die Menge

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

kompakt ist.

b) Beweisen Sie mit dem Satz von Bolzano–Weierstraß, dass jeder kompakte metrische Raum (X, d) vollständig ist.

Lösung:

a) Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Somit ist $(U_i)_{i\in I}$ auch eine offene Überdeckung jedes A_k. Die A_k sind kompakt, somit genügen endlich viele U_i für jedes A_k. Die Vereinigung dieser n Mengen von endlich vielen offenen Mengen ist eine endliche offene Teilüberdeckung von $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, welches somit kompakt ist. $\boxed{\text{3 Punkte}}$

b) Sei $(x_n) \in X$ Cauchy-Folge. (X, d) ist ein kompakten Raum, also existiert eine konvergente Teilfolge mit $\lim d(\tilde{x}_n, x^*) = 0$ mit $x^* \in X$. Somit

$$d(x_n, x^*) \leq d(x_n, \tilde{x}_m) + d(\tilde{x}_m, x^*) < \frac{\epsilon(n, m > n_1)}{2} + \frac{\epsilon(m > n_2)}{2} \leq \epsilon$$

$\boxed{\text{3 Punkte}}$

---

3. Aufgabe

(5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to]0, \infty[$ stetig mit $f(x) \leq 1/\|x\|$ für alle $x \neq 0$. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^n$ ein globales Maximum annimmt.

Lösung:

Da $f > 0$ existiert ein x_0 mit $f(x_0) > 0$. Sei r so gewählt, dass

$$\frac{1}{r} < f(x_0).$$

Dann gilt

$$\forall x \text{ mit } \|x\| > r : f(x) \leq \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{1}{r} < f(x_0).$$

f ist stetig, der abgeschlossene Ball $U_r(0)$ ist kompakt, also nimmt f auf $U_r(0)$ sein Maximum $\hat{f}$ an. Dieses ist wegen $\hat{f} \geq f(x_0) > 1/r$ größer als die Werte von f auf dem Rest des Gebietes. Somit ist $\hat{f}$ auch das globale Maximum.

---

4. Aufgabe (4 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x_1)\sin(x_2)}{x_1^2+x_2^2} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

im Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$ auf:

1. Stetigkeit,
2. partielle Differenzierbarkeit,
3. Differenzierbarkeit.

Lösung:

1. Betrachte eine Folge mit $x = x_1 = x_2$ und $x \to 0$. Somit

   $$\lim_{(x_1,x_2)\to 0} \frac{\sin(x_1)\sin(x_2)}{x_1^2+x_2^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1 \neq 0$$

   Somit ist f bei 0 nicht stetig. $\boxed{\text{2 Punkte}}$

2. $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\sin(t)\sin(0)}{t^2+0^2} - 0\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)0}{t^3} = 0$
   Ableitung in x_2-Richtung analog $\boxed{\text{1 Punkt}}$

3. Da f nicht stetig ist, kann es nicht differenzierbar sein. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

---

5. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 0 \}$ und $f \colon D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \cos x + y(y + 2).$$

1. Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von $f \colon D \to \mathbb{R}$.
2. Bezeichne (x_0, y_0) einen der kritischen Punkte. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f um den Entwicklungspunkt (x_0, y_0).

Lösung:

1. Zur Bestimmung der lokale Extrema suche die kritischen Punkte, d.h. $p \in D$ mit
$$D_p f = \begin{pmatrix} -\sin x \\ 2y+2 \end{pmatrix} = 0.$$
Dies ergibt $y = -1$ und $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{N}_0$, da $xy \leq 0$. Die Hesse-Matrix ist
$$H(f) = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Dies ergibt für die kritischen Punkte
$$H_{(k\pi,-1)}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad k \text{ gerade} \quad H_{(k\pi,-1)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad k \text{ ungerade}$$
Im ersten Fall sind es somit Sattelpunkte, da $\det H(f) < 0$. Im zweiten Fall lokale Minima, da $\det H(f) > 0$ und $H(f)_{1,1} > 0$.
$f(k\pi, -1) = -1 - 1 = -2$ für k ungerade $\boxed{\text{3 Punkte}}$

2. Da $\cos x \geq -1$ kann f bzgl. x nicht kleiner werden als im lokalen Minima. Weiterhin gilt $y(y+2) = y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1 \geq -1$, somit sind die lokalen Minima auch globale Minima.

   Zur Bestimmung des globalen Maxima für $(x, y) \to \pm\infty$ reicht es, das Verhalten für $y \to \pm\infty$ zu betrachten, da $\cos x \in [-1, 1]$. Für $y \to \pm\infty$ gilt $f(x, y) \to \infty$, somit gibt es kein globales Maximum. $\boxed{\text{2 Punkte}}$

3. Damit erhält man für das Taylorpolynom 2. Grades von f in einem der Minima, z.B. $p = (\pi, -1)$:
$$\begin{aligned} T_p f(x) &= f(p) + \langle \nabla f(p), (x-p) \rangle + \frac{1}{2} \langle (x-p), H_p(f)(x-p) \rangle \\ &= -2 + 0 + \frac{1}{2} \langle \begin{pmatrix} x_1 - \pi \\ x_2 + 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \pi \\ x_2 + 1 \end{pmatrix} \rangle \\ &= -2 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (x_1 - \pi)^2 \\ (x_2 + 1)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
Alternativ im Sattelpunkt $p = (0, -1)$:
$$\begin{aligned} T_p f(x) &= f(p) + \langle \nabla f(p), (x-p) \rangle + \frac{1}{2} \langle (x-p), H_p(f)(x-p) \rangle \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ (x_2 + 1)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
$\boxed{\text{1 Punkt}}$

6. Aufgabe

(5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass sich die Gleichung $x+y+z = \sin(xyz)$ in einer Umgebung V von $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ eindeutig nach z auflösen lässt, d.h. auf einer geeigneten Umgebung U von $(0,0)$ existiert eine Funktion u mit der Eigenschaft, dass

$$\{(x, y, u(x, y))|(x, y) \in U\}$$

die Lösungsmenge obiger Gleichung in V darstellt.

2. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von u an der Stelle $(0,0)$.

Lösung:

1. Wir brauchen von der Funktion $f(x,y,z) = x+y+z-\sin(xyz)$ die partiellen Ableitungen

$$D_p f = \begin{pmatrix} 1-yz\sin(xyz) \\ 1-xz\sin(xyz) \\ 1-xy\sin(xyz) \end{pmatrix}.$$

Um den Satz über implizite Funktionen anwenden zu können muss die Ableitung bzgl. z ungleich 0 sein. Es ergibt sich für $(x,y,z) = (0,0,0)$ somit $1 - xy\sin(xyz) = 1$. Also existiert in einer Umgebung U von $(0,0)$ eine Funktion u mit der Eigenschaft, dass

$$\{(x, y, u(x, y))|(x, y) \in U\}$$

die Lösungsmenge obiger Gleichung in V darstellt. $\boxed{\text{3 Punkte}}$

2. Nach dem Satz über implizite Funktionen ergibt sich für die Ableitung von u:

$$D_{(0,0)}u = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,u(0,0))\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}(0,0,u(0,0)) = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{2 Punkte}}$
