TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 07
Institut für Mathematik Stand: 16. Oktober 2007
Ferus / Garcke

Lösungsskizzen zur Nachklausur vom 16.10.07
Analysis II

---

1. Aufgabe (3 Punkte)

Untersuchen Sie, welche Metrikeigenschaften

$$d(x,y) = |x^2 - y^2|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

erfüllt.

Lösung:

1. $d(x,y) = |x^2 - y^2| \geq 0$ da Betrag ≥ 0
   $x = 1, y = -1 \Rightarrow d(x,y) = |1-1| = 0$, somit $d(x,y) = 0 \not\Rightarrow x = y$
2. $d(x,y) = |x^2 - y^2| = |y^2 - x^2| = d(y,x)$
3. $d(x,y) = |x^2 - y^2| = |x^2 - z^2 + z^2 - y^2| \leq |x^2 - z^2| + |z^2 - y^2| = d(x,z) + d(z,y)$

---

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum und seien $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ stetige Funktionen mit:

(i) $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}, x \in X$,

(ii) $f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ punktweise auf X.

Zeigen Sie:

1. Für $\epsilon > 0$ ist die Familie $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ definiert mittels der Funktionen f_n, f durch
   $$U_n := \{x \in X : f_n(x) - f(x) < \epsilon\} \qquad n \in \mathbb{N}$$
   eine offene Überdeckung von X.
2. $f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ gleichmäßig auf X. (Hierbei können Sie das Resultat von a) auch nutzen ohne es bewiesen zu haben)

Lösung:

1. (a) $f_n - f$ ist stetig und $U_n := \{x \in X : f_n(x) - f(x) \in (-\infty, \epsilon)\} = (f_n - f)^{-1}(-\infty, \epsilon)$. Da $(-\infty, \epsilon)$ offen in $\mathbb{R}$ ist jedes U_n offen als Urbild einer offenen Menge unter eine stetige Abbildung.

   (b) Betrachte $x \in X$, da f_n gegen f punktweise konvergiert, existiert ein $n(x)$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Somit $f_n(x) - f(x) \leq |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Also gilt $x \in U_n(x)$ und (U_n) ist eine offene Überdeckung von X.

2. (U_n) ist eine offene Überdeckung, somit gibt es endliche Teilüberdeckung, d.h.

$$X = U_{n_1} \cup \ldots \cup U_{n_k}, \qquad \text{mit } n_1 < \ldots < n_k.$$

   Da $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ gilt $f_{n+1}(x) - f(x) \leq f_n(x) - f(x)$ und somit $U_n \subset U_m$, falls $n > m$. Daraus folgt $X = U_{n_1}$ was die gleichmäßige Konvergenz impliziert.

---

3. Aufgabe

(3 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

im Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$ auf:

1. Stetigkeit,
2. partielle Differenzierbarkeit,
3. Differenzierbarkeit.

Lösung:

1. Betrachte eine Folge x_k mit $x_1 = x_2 \to 0$, somit $h(x_k) = x_k^2/(2x_k^2) = 1/2 \neq 0$, somit ist h im Punkt 0 nicht stetig und auch nicht differenzierbar.

2. Für die partielle Ableitung betrachte $\frac{h(0+k,0)-h(0)}{k} = \frac{\frac{k \cdot 0}{k^2+0} - 0}{k} = 0$, der Grenzwert existiert, also existiert die partielle Ableitung in x_1 (und analog in x_2) in Punkt 0.

4. Aufgabe

(3 Punkte)

Kann es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ geben, für die

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{\tan x}{y}\right)^2 + y + \frac{1}{y^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2\tan x}{y^3} + x$$

gilt? Bestimmen Sie gegebenenfalls ein solches f.

Lösung:

1. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{tan^2 x}{y^2} + y + 1/y^2\right) = -2\frac{tan^2 x}{y^3} + 1 - 2/y^3 = -2/y^3(tan^2 x + 1) + 1$$

   und

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2tan(x)/y^3 + x\right) = -2(1 + tan^2(x))/y^3 + 1.$$

   Somit gilt

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

   und die Bedingung an die gemischten zweiten Ableitungen nach Schwarz ist erfüllt.

2. Da gilt $tan'(x) = 1 + tan^2(x)$ und $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{tan^2 x + 1}{y^2} + y$ setzen wir an $\hat{f}(x,y) = tan(x)/y^2 + xy + g(x)$, es gilt $\frac{\partial}{\partial x}\hat{f}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + g'(x)$. Somit folgt $g'(x) = 0$ und $f(x,y) = tan(x)/y^2 + xy + c$. Nachrechnen für die Ableitung nach y ergibt das richtige.

5. Aufgabe

(3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (ay, bx)$ gegeben, mit $a, b \neq 0$. Bestimmen Sie die Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ in denen f lokal eine differenzierbare Inverse besitzt. Geben Sie die Jacobi-Matrix der inversen Funktion an der Stelle $f(x,y)$ an.

Lösung:

Als Jacobi-Matrix der partiellen Ableitungen ergibt sich

$$Df = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

die Determinante ist $-ab \neq 0$ und somit hat die Funktion lokal überall eine differenzierbar Umkehrabbildung. Die Jacobi-Matrix der Inversen an der Stelle $f(x,y)$ lautet mittels $D_{f(x,y)}f^{-1}(x,y) = (Df(x,y))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/b \\ 1/a & 0 \end{pmatrix}$

---

6. Aufgabe (3 Punkte)

Auf der dreidimensionalen Sphäre S^3 in $\mathbb{R}^4$ bestimme man die Extremstellen und Extremwerte der Funktion $f(x) = x_1x_4 - x_2x_3$.

Lösung:

Wir suchen die Extremstellen unter der Nebenbedingung $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1\}$. Ansatz mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren:

$$\begin{aligned} x_4 &= \lambda 2x_1 \\ -x_3 &= \lambda 2x_2 \\ -x_2 &= \lambda 2x_3 \\ x_1 &= \lambda 2x_4 \\ \sum x_i^2 &= 1. \end{aligned}$$

Auflösen nach λ ergibt $\lambda = \pm\frac{1}{2}$, einsetzen von $\lambda = 1/2$ liefert

$$x_1 = x_4 \qquad x_2 = -x_3,$$

einsetzen von $\lambda = -1/2$ entsprechend

$$x_1 = -x_4 \qquad x_2 = x_3.$$

Es gilt bei beiden

$$2(x_1^2 + x_2^2) = 1 \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{1/2 - x_2^2}.$$

Im Fall $\lambda = 1/2$ erhalten wir $f(x) = \sqrt{1/2 - x_2^2}^2 + x_2^2 = 1/2$, im Fall $\lambda = -1/2$ gilt $f(x) = -\sqrt{1/2 - x_2^2}^2 - x_2^2 = -1/2$. Durch Wahl von x_2 sind die Extremstellen (und der jeweilige Extremwert) bestimmt.
