TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 07
Institut für Mathematik Abgabe: 14. Mai 2007 (vor der Großübung)
Ferus / Garcke `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS07/Analysis2`

3. Übung Analysis II

(kompakte Mengen)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Sei X ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) Jede offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

b) Für jede Familie $(F_\alpha)_{i\in I}$ von abgeschlossenen Mengen von X gilt:
Ist $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n} \neq \varnothing$ für $i_1, \ldots, i_n \in I$, so ist auch $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$.

2. Aufgabe

a) Geben Sie Beispiele für beschränkte, abgeschlossene Teilmengen des metrischen Raums $(\mathbb{R}, |\arctan(x) - \arctan(y)|)$ an, die nicht kompakt sind.

b) Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Einheitskugel $B_1(0) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid d^2(x,0) \leq 1 \,\}$ von $(\mathbb{R}^n, d^2)$ kompakt ist.

c) Geben Sie eine offene Überdeckung von $U_1(0)$ in $(\mathbb{R}^2, d^2)$ an, die keine endliche Teilüberdeckung enthält.

3. Aufgabe

Betrachte das Interval $Y = (-1, 1)$ als topologischen Raum mit der Spurtopologie von $\mathbb{R}$. Man überzeuge sich, dass die Menge $G = [0, 1)$ abgeschlossen in Y (obwohl *nicht* abgeschlossen in $\mathbb{R}$) ist. Ist die Menge G kompakt in Y?

4. Aufgabe

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt. Gelten die folgenden Aussagen:

a) Jede Folge (x_n) mit $x_n \in K$ hat eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit Grenzwert in K.

b) Sei $M \subset K$ eine Menge ohne Häufungspunkt in K. Dann ist M endlich.

c) X kompakt $\Rightarrow$ X vollständig

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Seien K und L kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass dann $K + L := \{k + l \in \mathbb{R}^n \mid k \in K,\ l \in L\}$ auch kompakt ist.

2. Aufgabe

Sei X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ ein Teilraum, d.h. Y ist mit der Spurtopologie ausgestattet. Man zeige: eine Teilmenge $K \subset Y$ ist genau dann kompakt in Y, wenn sie eine kompakte Teilmenge von X ist.

3. Aufgabe

Seien $A_1, \ldots, A_n$ kompakte Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d).
Zeigen Sie, dass die Mengen

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

kompakt sind.

4. Aufgabe

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $A \subset X$ mit der Eigenschaft, dass jede Folge in A eine in A konvergente Teilfolge besitzt. Dann ist A kompakt.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ beliebig, aber fest.
Kann man aus der gegebenen offenen Überdeckung der Menge $A_i \subset \mathbb{R}$ (mit der Metrik d^1) eine endliche Teilüberdeckung auswählen? Ist A_i kompakt?
Beweisen Sie Ihre Entscheidung.

a) $A_1 = \{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit Überdeckung $(\,]\frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n}[\,)_{n\in\mathbb{N}}$,

b) $A_2 = \{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ mit Überdeckung $(\,]\frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n}[\,)_{n\in\mathbb{N}} \cup]-\varepsilon, \varepsilon[$,

c) $A_3 =]0, 1[$ mit Überdeckung $(\,]-\delta, 1+\delta[\,)_{\delta\in]0,1[}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Beweisen Sie Ihre Antwort.

a) Sei $M \subset X$ eine endliche Menge (d.h. M enthält nur endlich viele Elemente). Dann ist M kompakt.

b) Jede Überdeckung einer kompakten Teilmenge $K \subset X$ mit abgeschlossenen Mengen enthält eine endliche Teilüberdeckung.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Sei $d_A \colon A \times A \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto d(a, b)$ die *induzierte Metrik* auf A.

a) Zeigen Sie, dass $U \subset A$ genau dann offen in (A, d_A) ist, wenn es eine in (X, d) offene Menge $W \subset X$ gibt mit $U = W \cap A$.

b) Sei $I = [0, 1[$ und d_I die durch die Standardmetrik von $\mathbb{R}$ auf I induzierte Metrik. Zeigen Sie, dass die Intervalle $[0, a[$ mit $a \in]0, 1[$ in (I, d_I) offen sind.

c) Zeigen Sie, dass A genau dann kompakt in (X, d) ist, wenn A in (A, d_A) kompakt ist.

   Kann man in diesem Satz „kompakt“ durch „abgeschlossen“ ersetzen?

4. Aufgabe (5 Punkte)

a) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, und es gelte $K \cap A = \emptyset$. Zeigen Sie, dass bezüglich der euklidischen Metrik gilt

$$\operatorname{dist}(A, K) := \inf\{d(a, k) : a \in A, k \in K\} > 0$$

b) Stimmt die Aussage auch noch, wenn beide Mengen lediglich als abgeschlossen vorausgesetzt werden? (Beweis bzw. Gegenbeispiel)

Gesamtpunktzahl: 20