TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 07
Institut für Mathematik Abgabe: 2. Juli 2007 (vor der Großübung)
Ferus / Garcke http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS07/Analysis2

10. Übung Analysis II

(Umkehrsatz, implizite Funktionen)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ \sin(\cos(y)) \end{pmatrix}, \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y^3 \\ e^x \end{pmatrix}$$

Wo sind die Funktionen lokal umkehrbar? Sind sie global umkehrbar auf $\mathbb{R}^2$ ohne die Stellen wo sie nicht lokal umkehrbar sind ? Wie lauten die Ableitungen der Umkehrfunktionen bei $f(x,y)$ bzw. $g(x,y)$?

2. Aufgabe

Betrachen Sie die Funktionen $y(x)$ implizit definiert durch

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 = C.$$

Für welche Werte von C gilt wo der Satz über implizite Funktionen.

3. Aufgabe

Bestimmen Sie die Ableitung von $\varphi : (0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \arcsin\sqrt{1 - x^3}$.

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Vergleichen Sie den Umkehrsatz und den Satz über implizite Funktionen mit entsprechenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme.

2. Aufgabe

Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$. Sei $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(r,\varphi) \mapsto F(r,\varphi) = (ra\cos\varphi, rb\sin\varphi)$. Zeigen Sie, dass F lokal, aber nicht global invertierbar ist. Wie kann man den Definitions- und Wertebereich verändern, so dass F bijektiv wird?

Hausaufgaben

1. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x + y + z, xy + yz + zx, xyz)$.

Zeigen Sie, dass f in $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ genau dann lokal invertierbar ist, wenn $(x_0 - y_0)(y_0 - z_0)(z_0 - x_0) \neq 0$ gilt. Bestimmen Sie in diesen Fällen die Jacobi–Matrix der Umkehrabbildung an der Stelle $f(x_0, y_0, z_0)$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $(x,y) \mapsto (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$.

Bestimmen Sie die Ableitung $D_p f$ (für alle Punkte p, wo diese existiert) und zeigen Sie, dass f lokal invertierbar ist. Zeigen Sie dann, dass f auch global invertierbar ist, indem Sie die Umkehrabbildung f^{-1} finden.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachten Sie die Gleichung $z^3 + z + xy = 1$. Diese hat für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung $z = \varphi(x,y)$. Zeigen Sie, dass

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \varphi(x,y)$$

differenzierbar ist und berechnen Sie $\varphi'\binom{1}{1}$.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\gamma\colon\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbare Kurve und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung.

Zeigen Sie, dass der Betrag des Anstiegs von f entlang γ (d.h. der Betrag des Anstiegs von $f \circ \gamma$) im Punkt $\gamma(0)$ kleiner oder gleich $\|\operatorname{grad}_{\gamma(0)} f\| \|\gamma'(0)\|$ ist. Wann ist der Anstieg gleich $\|\operatorname{grad}_{\gamma(0)} f\| \|\gamma'(0)\|$? Geben Sie ein Beispiel für eine solche Kurve an.

Hinweis: Sie dürfen die Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung verwenden, d.h. für das Standardskalarprodukt $\langle\, ,\rangle$ gilt: $|\langle a,b\rangle| \leq \|a\|\|b\|$ für $a,b \in \mathbb{R}^n$.

Zusatzaufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + uy + e^v &= 0, \\ 2x + u^2 - uv &= 5 \end{aligned}$$

für vorgegebenes (x,y) aus einer Umgebung V von $(x_0,y_0) = (2,5)$ genau eine Lösung $(u(x,y), v(x,y))$ besitzt und dass die Zuordnung

$$g : V \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$$

stetig differenzierbar ist. Bestimmen Sie $g'\binom{2}{5}$.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst auf einer Umgebung U von $(u_0,v_0) = (-1,0)$ die Funktion

$$f : U \to \mathbb{R}^2, \quad (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v)),$$

die zu vorgegebenem $(u,v) \in U$ die Lösung $(x(u,v), y(u,v))$ des Gleichungssystems liefert.

Gesamtpunktzahl: 20