Sommersemester 2009
Prof. Dr. John M. Sullivan
Dr. Carsten Schultz

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

Klausur Analysis III

21. 7. 2009

Aufgabe 1. **3 Punkte**

Wir betrachten die folgenden Funktionen $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f_1(x) = \sin x, \qquad f_2(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \qquad f_3(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beantworten Sie für jedes $i \in \{1,2,3\}$ die folgende Frage: Gibt es eine punktweise monoton wachsende Folge $(g_n)_n$ von Funktionen $g_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, deren punktweiser Limes f_i ist? Wenn ja, geben Sie eine solche an, wenn nein, geben Sie einen Beweis dieser Tatsache.

Lösung. Eine solche Folge existiert genau dann, wenn $f_i \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R})$, wenn also f_i halbstetig von unten und außerhalb eines Kompaktums nicht-negativ ist.

Es ist $f_1 \notin \mathcal{H}^+(\mathbb{R})$, da $\{x \in \mathbb{R}\colon f_1(x) < 0\} \supset \left\{2k\pi - \frac{\pi}{2}\colon k \in \mathbb{Z}\right\}$ unbeschränkt ist.

Für $n > 0$ sei

$$g_n(x) := \begin{cases} nx, & 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \le x \le n, \\ n+1-x, & n \le x \le x+1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(An dieser Stelle wäre eine Skizze sinnvoll, da die folgenden Behauptungen an ihr zu erkennen sind.) Dann ist $g_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, und für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $g_n(x) \le g_{n+1}(x)$ und $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f_2(x)$.

Es ist $f_3 \notin \mathcal{H}^+(\mathbb{R})$, denn es ist $f_3^{-1}[(1/2,\infty)] = [0,1/2)$ nicht offen und damit f_3 nicht halbstetig von unten. □

Aufgabe 2. **3 Punkte**

Es sei $C \in \mathbb{R}$, und $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen $g_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Für alle $j \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gelte $|g_j(x)| \le C$. Zeigen Sie: Existiert der punktweise Limes $f := \lim_{k\to\infty} g_k$, so ist f lokal integrierbar.

Lösung. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige kompakte Teilmenge. Es ist zu zeigen, dass $f\chi_K$ integrierbar ist. Die Funktion $C\chi_K$ ist integrierbar, da K kompakt und daher integrierbar ist. Für alle $j \in \mathbb{N}$ ist $g_j\chi_K$ integrierbar, da g_j lokal integrierbar ist. Nach Voraussetzung ist $|g_j\chi_K| \le C\chi_K$ für alle j und $f\chi_K = \lim_{j\to\infty} g_j\chi_K$ punktweise. Mit dem Satz über dominierte Konvergenz folgt, dass $f\chi_K$ integrierbar ist. □

Aufgabe 3. **4 Punkte**

Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Zeigen Sie: Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)g(y-x) \end{aligned}$$

integrierbar, und die dadurch definierte Funktion $f * g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)\, d\lambda(x)$$

ist stetig.

Lösung. Es sei $C \in \mathbb{R}$ so, dass $|g| \leq C$.

Für den ersten Teil der Aufgabe sei $y \in \mathbb{R}^n$ fest und $\bar{g}(x) = g(y-x)$. Die Funktion $\bar{g}$ ist stetig und beschränkt, die Funktion f ist integrierbar. Es ist zu zeigen, dass damit auch das Produkt $f\bar{g}$ integrierbar ist. *Variante 1:* Da $\bar{g}$ stetig ist, ist $\bar{g}$ lokal integrierbar und damit, da beschränkt, $\bar{g} \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Aus der Hölder-Ungleichung (genauer: Satz B2.31) folgt $f\bar{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. *Variante 2:* Da f integrierbar ist, existiert eine Folge $(h_k)_k$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|h_k - f\|_{L^1} \to 0$. Da $\bar{g}$ stetig ist, ist $h_k\bar{g} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Da $\|h_k\bar{g} - f\bar{g}\|_{L^1} = \|(h_k - f)\bar{g}\|_{L^1} \leq C\|h_k - f\|_{L^1} \to 0$, ist $f\bar{g}$ integrierbar.

Für den zweiten Teil bemerken wir zunächst, dass für alle x die Funktion $f(x)g(y-x)$ in y stetig ist. Außerdem gilt für alle x, dass $|f(x)g(y-x)| \leq C|f(x)|$, wobei die rechte Seite unabhängig von y und als Funktion in x integrierbar ist. Damit ist das parameterabhängige Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)\, d\lambda(x)$ stetig in y. □

Aufgabe 4. **4 Punkte**

Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ die Menge

$$M := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_2(x_1 + x_3) = 9\right\}.$$

Zeigen Sie, dass M eine Mannigfaltigkeit ist, und bestimmen Sie den Tangentialraum T_pM und den Normalenraum N_pM am Punkt $p = (2, -1, -1) \in M$.

Lösung. Wir betrachten

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_2(x_1 + x + 3) - 9 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so dass $M = f^{-1}[\{0\}]$. Die Jacobimatrix ist

$$J_xf = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2(x_1 - x_2) & 2(2x_2 - x_1 - x_3) & 2(x_3 - x_3) \end{pmatrix}.$$

Der Rang dieser Matrix ist genau dann kleiner als 2, wenn die zweite Zeile ein Vielfaches der ersten ist, wenn also $x_1 - x_2 = 2x_2 - x_1 - x_3 = x_3 - x_2$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x_1 = x_2 = x_3$. Da $f(t,t,t) = (3t, -9) \neq 0$, ist 0 ein regulärer Wert von f und M eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $3 - 2 = 1$.

Für $p = (2, -1, -1)$ ist $J_pf = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$. Es folgt, dass $T_pM = \ker D_pf = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $N_pM = (T_pM)^\perp = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Letzteres ist der Zeilenraum von J_pf. □

Aufgabe 5. **4 Punkte**

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (t,r) &\mapsto (t(r+2), t^2 - r) \end{aligned}$$

ist auf $U := (0,1) \times (-1,1)$ injektiv. (Dies muss nicht gezeigt werden.) Es sei $V := \varphi[U]$. Zeigen Sie, dass $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

Weiter sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ über V integrierbar. Wenden Sie die Transformationsformel an, um eine Gleichung der Form

$$\int_V f\,d\lambda = \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \dots f(\dots,\dots)\,dr\,dt$$

(mit konkreten Ausdrücken in r und t an Stelle der Pünktchen) zu erhalten. Benutzen Sie diese, um den Flächeninhalt (das heißt, das 2-dimensionale Volumen) von V zu berechnen.

Lösung. Es ist

$$J_{(t,r)}\varphi = \begin{pmatrix} r+2 & t \\ 2t & -1 \end{pmatrix}, \qquad \det(D_{(t,r)}\varphi) = \det(J_{(t,r)}\varphi) = -r - 2 - 2t^2.$$

Für $(t,r) \in U$ ist $\det(D_{(t,r)}\varphi) < 1 - 2 < 0$.

Die Funktion $\varphi\colon U \to V$ ist offenbar stetig differenzierbar und surjektiv. Sie ist auch injektiv, was wir nicht nachprüfen. Da ihr Differential an jeder Stelle ein Isomorphismus ist, folgt aus dem Satz über die Umkehrfunktion, dass sie ein Diffeomorphismus ist.

Es ist

$$\begin{aligned} \int_V f\,d\lambda &= \int_U |\det(D\varphi)|(f \circ \varphi)\,d\lambda = \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^1 (2t^2 + r + 2) f(t(r+2), t^2 - r)\,dr\,dt, \end{aligned}$$

die erste Gleichung nach dem Substitutionssatz, die zweite durch Einsetzen und den Satz von Fubini.

Insbesondere ist

$$\operatorname{vol}(V) = \int_V 1\,d\lambda = \int_0^1 \int_{-1}^1 2t^2 + r + 2\,dr\,dt = \int_0^1 2(2t^2+2)\,dt = 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 = \frac{16}{3}.$$

□