Sommersemester 2009
Prof. Dr. John M. Sullivan
Dr. Carsten Schultz

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

Nachklausur Analysis III

5. 10. 2009

Aufgabe 1. **6 Punkte**

Wir betrachten die folgenden Funktionen $f_i\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$.

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ -1, & x \neq 0, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ -1, & x \leq 0, \end{cases} \qquad f_3(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2}, & 0 < |x| < 1, \\ -\infty, & x = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beantworten Sie für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ die folgende Frage: Gibt es eine punktweise monoton **fallende** Folge $(g_n)_n$ von Funktionen $g_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, deren punktweiser Limes f_i ist? Wenn ja, geben Sie eine solche an, wenn nein, geben Sie einen Beweis dieser Tatsache.

Lösung. Eine solche Folge existiert genau dann, wenn $f_i \in \mathcal{H}^-(\mathbb{R})$, wenn also f_i halbstetig von oben und außerhalb eines Kompaktums nicht-positiv ist.

Wir definieren für $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 - n|x|, & |x| \leq \frac{2}{n}, \\ -1, & n+1 \geq |x| \geq \frac{2}{n}, \\ |x| - n - 2, & n+1 \leq |x| \leq n+2, \\ 0, & |x| \geq n+2. \end{cases}$$

(Skizze.) Dann ist $g_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ für alle n, die Folge $(g_n(x))_n$ ist monoton fallend für alle x und $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f_1(x)$ für alle x.

Die Funktion f_2 ist nicht halbstetig von oben, denn $f_2^{-1}[[-\infty, -1/2)] = \{x\colon x \leq 0\}$ ist nicht offen.

Wir definieren

$$h_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2}, & \frac{1}{n} < |x| < 1, \\ 1 - n^2, & |x| \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

also $h_n(x) = \max f_3, 1 - n^2$. (Skizze.) Dann ist $h_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ für alle n, die Folge $(h_n(x))_n$ ist monoton fallend für alle x und $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = f_3(x)$ für alle x. □

Aufgabe 2. **6 Punkte**

Es seien $f, g, h, h_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Entscheiden sie für jede der drei folgenden Aussagen, ob sie im allgemeinen wahr ist. Geben sie jeweils ein Gegenbeispiel oder einen Beweis. (Dies kann hauptsächlich aus dem Zitieren eines Satzes oder eines Beispiels bestehen.)

(i) Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und $f \le h \le g$, so ist $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
(ii) Sind $f, g, h_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $f \le h_n \le g$ für alle n und konvergiert (h_n) punktweise gegen h, so ist $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
(iii) Sind $f, g, h_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $f \le h \le g$ und konvergiert (h_n) punktweise gegen h, so ist $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Lösung. Aussage (i) gilt im allgemeinen nicht. Wir wissen, dass eine Teilmenge $M \subset [0,1]$ existiert, die nicht messbar ist, so dass also χ_M nicht integrierbar ist. Es ist aber $0 \le \chi_M \le \chi_{[0,1]}$ und $0, \chi_{[0,1]} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Aussage (ii) gilt im allgemeinen und ist im wesentlichen der Satz über dominierte Konvergenz: Mit f und g ist auch $\max\{-f, g\}$ integrierbar, und $|h_n| \le \max\{-f, g\}$. Damit ist der punktweise Limes der h_n integrierbar, wenn alle h_n integrierbar sind.

Auch Aussage (iii) gilt im allgemeinen, denn sie lässt sich auf Aussage (ii) zurückführen: Setzen wir $h'_n := \max\{f, \min\{g, h_n\}\}$, so ist h'_n integrierbar, $f \le h'_n \le g$ und $\lim_n h'_n(x) = \max\{f(x), \min\{g(x), \lim_n h_n(x)\}\} = \max\{f(x), \min\{g(x), h(x)\}\} = h(x)$ für alle x und damit h integrierbar. □

Aufgabe 3. **8 Punkte**

Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ die Menge

$$M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 6,\ 2y^2 + z^2 = 3\right\}.$$

Zeigen Sie, dass M eine Mannigfaltigkeit ist, und bestimmen Sie den Tangentialraum T_pM und den Normalenraum N_pM am Punkt $p = (2, -1, 1) \in M$.

Lösung. Wir betrachten

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 6 \\ 2y^2 + z^2 - 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so dass $M = f^{-1}[\{0\}]$. Die Jacobimatrix ist

$$J_{(x,y,z)} f = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 4y & 2z \end{pmatrix}.$$

Ist der Rang dieser Matrix kleiner als 2, so ist $0 = \det \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 4y \end{pmatrix} = 8xy$, $0 = \det \begin{pmatrix} 2x & 2z \\ 0 & 2z \end{pmatrix} = 4xz$, $0 = \det \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 4y & 2z \end{pmatrix} = -4yz$, also sind zwei der drei Koordinaten gleich Null. Es ist aber $f(x,0,0) = (x^2 - 6, -3) \ne 0$, $f(0,y,0) = (y^2 - 6, 2y^2 - 3) \ne 0$, $f(0,0,z) = (z^2 - 6, z^2 - 3) \ne 0$. Also ist 0 ein regulärer Wert von f und M eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $3 - 2 = 1$.

Für $p = (2, -1, 1)$ ist $J_pf = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. Es folgt, dass $T_pM = \ker D_pf = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $N_pM = (T_pM)^\perp = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Letzteres ist der Zeilenraum von J_pf. □

Aufgabe 4. **6 Punkte**

Die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2\\ (s,t) &\mapsto ((2-s)t, st^2)\end{aligned}$$

ist auf $U := (-2,1) \times (0,1)$ injektiv. (Dies muss nicht gezeigt werden.) Es sei $V := \varphi[U]$. Zeigen Sie, dass $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

Weiter sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ über V integrierbar. Wenden Sie die Substitutionsformel an, um eine Gleichung der Form

$$\int_V f\,d\lambda = \int_{\dots}^{\dots}\int_{\dots}^{\dots} \dots f(\dots,\dots)\,ds\,dt$$

(mit konkreten Ausdrücken in s und t an Stelle der Pünktchen) zu erhalten. Benutzen Sie diese, um den Flächeninhalt (das heißt, das 2-dimensionale Volumen) von V zu berechnen.

Lösung. Es ist

$$J_{(s,t)}\varphi = \begin{pmatrix} -t & 2-s\\ t^2 & 2st\end{pmatrix}, \quad \det(D_{(s,t)}\varphi) = \det(J_{(s,t)}\varphi) = -2st^2 - (2t^2 - st^2) = -(s+2)t^2.$$

Für $(s,t) \in U$ ist $\det(D_{(t,r)}\varphi) < 0$.

Die Funktion $\varphi\colon U \to V$ ist offenbar stetig differenzierbar und surjektiv. Sie ist auch injektiv, was wir nicht nachprüfen. Da ihr Differential an jeder Stelle ein Isomorphismus ist, folgt aus dem Satz über die Umkehrfunktion, dass sie ein Diffeomorphismus ist.

Es ist

$$\begin{aligned}\int_V f\,d\lambda &= \int_U |\det(D\varphi)|(f\circ\varphi)\,d\lambda =\\ &= \int_0^1\int_{-2}^1 (s+2)t^2 f((2-s)t, st^2)\,ds\,dt,\end{aligned}$$

die erste Gleichung nach dem Substitutionssatz, die zweite durch Einsetzen und den Satz von Fubini.

Insbesondere ist

$$\mathrm{vol}(V) = \int_V 1\,d\lambda = \int_0^1\int_{-2}^1 (s+2)t^2\,ds\,dt = \int_0^1 t^2\,dt \cdot \int_{-2}^1 (s+2)\,ds = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2} = \frac{3}{2}.$$

□

Aufgabe 5. **6 Punkte**

Es sei

$$\begin{aligned}f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto \frac{1}{\max\left\{1, \|x\|^3\right\}},\end{aligned}$$

wobei $\|(x_1,x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda$. *Tipp:* Polarkoordinaten.

Lösung. Es ist

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda &= \int_0^{2\pi}\int_0^\infty r\cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty r\cdot\frac{1}{\max\{1,r^3\}}\,dr\,d\varphi =\\ &= 2\pi\left(\int_0^1 r\,dr + \int_1^\infty \frac{1}{r^2}\,dr\right) = 2\pi\left(\frac{1}{2}+1\right) = 3\pi.\end{aligned}$$

□