A. LEBESGUE-INTEGRATION

A1. Einleitung

Im letzten Semester betrachteten wir das Integral für Regelfunktionen auf Intervallen in $\mathbb{R}$. Unser Hauptthema in diesem Semester ist Integration in mehreren Dimensionen. Dabei machen wir auch den Schritt vom Regelintegral zum Lebesgue-Integral. Lebesgue-Integration liefert ein sogenanntes Maß, mit dessen Hilfe man das Volumen von vielen Teilmengen im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ messen kann. Maßtheorie bildet auch die Grundlage der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Es gibt viele Zugänge zum Lebesgue-Integral. Wir fangen nicht mit abstrakter Maßtheorie an, sondern leiten das Lebesgue-Integral her als Grenzwert von Integralen stetiger Funktionen. Damit definieren wir das Lebesgue-Maß und erst danach Maße im Allgemeinen. Das Lehrbuch von Forster folgt eine ähnliche Herangehensweise.

Später im Semester betrachten wir auch Integrale über Flächen und andere Untermannigfaltigkeiten im Raum. Dabei lernen wir Differentialformen kennen, die auch eine wichtige Rolle in Differentialgeometrie und -topologie spielen.

A2. Hintergrund

Wir fangen mit ein paar Definitionen und Hilfsätzen an, die wir eigentlich im letzten Semester hätten behandeln können.

Definition A2.1. Für $i = 1, \dots, n$ sei (X_i, d_i) ein metrischer Raum. Auf dem Produktmenge $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ sei die Produktmetrik definiert durch

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_{i=1,\dots,n} d_i(x_i, y_i).$$

Bemerkung A2.2. Diese ist tatsächlich eine Metrik; wir zeigen nur die Dreiecksungleichung. Seien $x, y, z \in X$. Aus der Definition von d gibt es i mit $d(x,z) = d_i(x_i, z_i)$. Damit gilt

$$d(x,z) = d_i(x_i,z_i) \le d_i(x_i,y_i) + d(y_i,z_i) \le d(x,y) + d(y,z).$$

Bemerkung A2.3. Im Falle $X_i = \mathbb{R}$ ist diese Produktmetrik auf $\mathbb{R}^n$ die ℓ^∞-Metrik. Man kann auch ℓ^p-ähnliche Produktmetriken im Allgemeinen definieren:

$$d_p(x,y) := \Big(\sum_i d_i(x_i,y_i)^p\Big)^{1/p}.$$

Diese sind alle äquivalent zur obigen Produktmetrik.

Lemma A2.4. *Seien K, K' kompakte Räume. Dann ist auch $K \times K'$ kompakt.*

Beweis. Für metrische Räume sind Kompaktheit und Folgenkompaktheit gleich (Korollar II.B6.21). Sei (x_n, x_n') eine Folge in $K \times K'$. Weil K folgenkompakt ist, können wir die Folge mit einer Teilfolge ersetzen, damit x_n in K gegen p konvergiert. Weil K' folgenkompakt ist, können wir wieder eine Teilfolge finden, damit $x_n' \to p' \in K'$. Aus der Definition der Produktmetrik konvergiert dann die Teilfolge (x_n, x_n') gegen (p, p'). □

Bemerkung A2.5. Dies ist nur ein Spezialfall des sehr allgemeinen Satzes von Tichonow: jedes (auch unendliche) kartesische Produkt kompakter Räume ist (mit der sogenannten Produkttopologie) selbst kompakt. (Vgl. auch II.B6.28.)

Lemma A2.6. *Seien X, K, Y metrische Räume, K kompakt. Sei $f: X \times K \to Y$ eine stetige Abbildung. Wir definieren*

$$\tilde f: X \to C(K,Y), \quad (\tilde f(x))(t) := f(x,t) \in Y.$$

Dann ist $\tilde f$ stetig. Äquivalent heißt das: Für jede konvergente Folge (x_n) in X (mit $x_n \to p \in X$) konvergieren die Abbildungen $\tilde f(x_n)$ gleichmäßig gegen $\tilde f(p)$.

Bemerkung A2.7. Die Stetigkeit von f ist bezüglich der Produktmetrik auf $X \times K$; die von $\tilde f$ ist bezüglich der Supremummetrik d_∞ (vgl. II.B5.7), d.h. bezüglich gleichmäßiger Konvergenz (vgl. II.B8.15). Die Äquivalenz der beiden Aussagen folgt aus Korollar II.B7.15, das uns erlaubt, Stetigkeit mittels Folgen zu betrachten.

Beweis. Die Teilmenge $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{p\} \subset X$ ist kompakt (weil jede offene Überdeckung eine Umgebung von p enthält, die fast alle x_n enthält). Nach Lemma A2.4 ist dann $A \times K$ kompakt. Damit ist die Beschränkung $f|_{A\times K}$ nach Satz II.B8.8 gleichmäßig stetig, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für $x, x' \in A$ und $t, t' \in K$ mit $d(x,x') < \delta$ und $d(t,t') < \delta$ gilt $d(f(x,t), f(x',t')) < \varepsilon$. Weil $x_n \to p$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für $n \ge N$ gilt $d(x_n, p) < \delta$. Daher gilt für $n \ge N$ und für alle $t \in K$, dass $d(\tilde f(x_n)(t), \tilde f(p)(t)) < \varepsilon$. D.h. per Definition, dass $d_\infty(\tilde f(x_n), \tilde f(t)) \le \varepsilon$. Damit konvergieren $\tilde f(x_n)$ gleichmäßig gegen $\tilde f(p)$. □

A3. Integrale stetiger Funktionen

Wir betrachten zunächst Integrale stetiger Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$. Sei $Q = [a,b] \times [c,d]$ z.B. ein Rechteck im $\mathbb{R}^2$ und sei $f: Q \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Um das Integral von f auf Q zu definieren, möchten wir

$$\int_Q f := \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)\,dy$$

setzen. Sei $F(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx$. Die erste Frage ist, wann diese Funktion integrierbar ist. Wir untersuchen jetzt solche Integrale, die von einem Parameter abhängig sind.

Lemma A3.1. *Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Das Regelintegral ist eine Lipschitzabbildung $C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, insbesondere stetig.*

Beweis. Nach dem Mittelwertsatz II.A4.12 der Integralrechnung gilt

$$\Big|\int_a^b f - \int_a^b g\Big| \le \int_a^b \big|f - g\big| \le (b-a)\, d_\infty(f,g).$$

Damit ist $b - a$ eine Lipschitzkonstante für das Integral. □

Satz A3.2. *Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und sei X ein metrischer Raum. Sei $f\colon X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die durch*

$$F(x) := \int_a^b f(x,t)\,dt$$

definierte Funktion $F\colon X \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis. Dieser Satz folgt direkt aus Lemma A2.6 und Lemma A3.1: Ist $\tilde f$ wie im ersten Lemma definiert, gilt $F(x) = \int_a^b \tilde f(x)$, d.h., F ist die Komposition der beiden stetigen Abbildungen aus den beiden Lemmata. □

Definition A3.3. Ein *kompakter Quader* im $\mathbb{R}^n$ ist das Produkt

$$Q = [a_1,b_1] \times \cdots [a_n,b_n]$$

von n kompakten Intervallen.

Definition A3.4. Sei $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem kompakten Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$. Wir definieren wie folgt das Integral:

$$\int_Q f\,d\lambda := \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_n \cdots dx_1.$$

Bemerkung A3.5. Hier benutzen wir mehrmals den letzten Satz. Per Induktion ist für jedes i das Integral

$$\int_{a_i}^{b_i} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_n \cdots dx_i$$

eine stetige Funktion der restlichen Variablen $x_1,\dots x_{i-1}$.

Eine stetige Funktion f auf dem gesamten Raum $\mathbb{R}^n$ hat möglicherweise kein sinnvolles Integral. (Auch im Falle $n = 1$ wäre das ein uneigentliches Integral, das vielleicht nicht konvergiert.) Wir betrachten deswegen nur diejenigen stetigen Funktionen, die ausserhalb eines beschränkten Gebiets Null sind.

Definition A3.6. Sei X ein metrischer Raum und sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Der *Träger* von f ist

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}},$$

die abgeschlossene Hülle der Teilmenge, wo f ungleich Null ist.

Beispiel A3.7. Sei $A \subset X$ eine Teilmenge und sei χ_A die charakteristische Funktion von A:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Dann gilt $\operatorname{supp}\chi_A = \overline{A}$. Zum Beispiel gilt $\operatorname{supp}\chi_{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

```
Ende der Vorlesung 2009 April 14
```

Definition A3.8. Sei X ein metrischer Raum. Den Raum aller stetigen Funktionen auf X mit kompaktem Träger nennen wir $C_c(X)$.

Bemerkung A3.9. Der Raum $C_c(X)$ ist ein Vektorraum, ein Unterraum in $C(X,\mathbb{R})$. Auf $C_c(X)$ gibt es die Norm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Bemerkung A3.10. Ist K kompakt, dann hat (nach Korollar II.B6.25) jede Funktion auf K einen kompakten Träger. Insbesondere gilt $C_c(K) = C(K,\mathbb{R})$.

Das nächste Lemma gibt uns eine stetige Variante der charakteristischen Funktion:

Lemma A3.11. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Es gibt $\varphi_B \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \le \varphi_B \le 1$ und $\varphi_B|_B \equiv 1$.*

Beweis. Sei $d(x,B) := \inf_{y\in B} |x-y|$ die Abstandsfunktion zu B. Wir setzen $\varphi_B(x) := \max(0, 1-d(x,B))$. Weil B beschränkt ist, liegt es in einem R-Ball. Dann liegt $\operatorname{supp}\varphi_B$ im $(R+1)$-Ball und ist damit beschränkt und kompakt. □

Definition A3.12. Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Weil $\operatorname{supp} f$ kompakt ist, können wir einen Quader $Q \supset \operatorname{supp} f$ wählen. Das Integral von f wird als Integral über Q definiert:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda := \int_Q f\,d\lambda.$$

(Der Wert hängt nicht vom gewählten Q ab – warum?)

Bemerkung A3.13. Es gibt viele äquivalente Schreibweisen für dieses Integral:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda &== \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,d^n x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1 \cdots x_n. \end{aligned}$$

Später verstehen wir λ hier als Name des Lebesgue-Maßes; es bedeutet etwa die Volumenform auf $\mathbb{R}^n$.

Lemma A3.14. *Das Integral $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda$ ist eine lineare Abbildung $C_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, ein sogenanntes* lineares Funktional *auf $C_c(\mathbb{R}^n)$. Es gilt auch Monotonie:*

$$f \ge 0 \implies \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda \ge 0.$$

Beweisskizze. Dies folgt aus n-facher Anwendung der entsprechenden Eigenschaften (II.A4.10) des Regelintegrals. □

Bemerkung A3.15. Aus Linearität und Monotonie folgt

$$f \le g \implies \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda \le \int_{\mathbb{R}^n} g\,d\lambda.$$

Bemerkung A3.16. Bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ ist das Integral $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda$ unstetig. (Sei z.B. $f_k := \frac{1}{k}\chi_{[-k,k]}$; obwohl $f_k \to 0$ gleichmäßig, gilt $\int f_k = 2$.) Ist aber (f_k) eine Folge, die gleichmäßig gegen $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ konvergiert, und ist $\bigcup_k \operatorname{supp} f_k$ kompakt, dann gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f_k\,d\lambda \to \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda$. (Vgl. Lemma A4.2 unten.)

Unser Ziel ist, eine Substitutionsregel für das Integral über $\mathbb{R}^n$ zu finden. Für $n = 1$ können wir gleich die alte Substitutionsregel (II.A6.1) wie folgt umschreiben:

Satz A3.17. *Sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus und sei $f \in C_c(\mathbb{R})$. Dann ist $f \circ \varphi \in C_c(\mathbb{R})$ und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}} (f \circ \varphi)\,|\varphi'| = \int_{\mathbb{R}} f.$$

Beweis. Die Funktion φ ist streng monoton; ohne Einschränkung nehmen wir an, sie ist steigend. (Sonst ersetzen wir φ mit $-\varphi$.) Sei $[c, d]$ ein kompaktes Intervall mit $\operatorname{supp} f \subset [c, d]$ und seien $a = \varphi^{-1}(c)$, $b = \varphi^{-1}(d)$. Dann gilt $\operatorname{supp}(f \circ \varphi) \subset [a, b]$ und mit der Substitutionsregel II.A6.1 gilt

$$\int_{\mathbb{R}} (f \circ \varphi)\varphi'\,d\lambda = \int_a^b (f \circ \varphi)\varphi' = \int_c^d f = \int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda. \qquad \square$$

Ein wichtiger Spezialfall ist eine Translation $\varphi = \tau_v\colon x \mapsto x+v$ mit $\tau_v' \equiv 1$: das Integral ist translationsinvariant im Sinne, dass $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f \circ \tau_v$.

Durch n-fache Anwendung dieser Regel sehen wir, auch das Integral über $\mathbb{R}^n$ ist translationsinvariant:

Satz A3.18 (Translationsinvarianz). *Sei $v \in \mathbb{R}^n$ und sei $\tau_v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Translation $x \mapsto x + v$. Für $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \circ \tau_v\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda.$$

Beweis. (Aufgabe.) $\square$

A4. Eindeutigkeit des Integrals

Nach den Translationen sind vielleicht die einfachsten Diffeomorphismen des $\mathbb{R}^n$ die linearen Abbildungen $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $A \in \mathsf{GL}(\mathbb{R}^n)$. (Hier unterscheiden wir nicht zwischen der Abbildung A und ihrer $n \times n$-Darstellungsmatrix.) Der Substitutionsregel in diesem Falle wird sagen,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f \circ A)\,|\det A|\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda.$$

Insbesondere für eine Rotation $A \in O(n)$ mit $\det A = \pm 1$ gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f \circ A\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda$: das Integral ist rotationsinvariant. Dies macht intuitiv auch Sinn, wenn man sich das Integral $\int f$ als Volumen unter dem Graphen von f vorstellt.

Die Rotationsinvarianz ist aber viel schwieriger zu beweisen, weil unsere Definition des Integrals so eng mit dem Koordinatensystem verbunden ist. Dazu brauchen wir eine Charakterisierung des Integrals, das Ziel dieses Abschnitts:

Satz A4.1. *Das Integral ist (bis auf eine multiplikative Konstante) das einzige lineare Funktional $I\colon C_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, das monoton und translationsinvariant ist.*

Zunächst untersuchen wir die stetigkeit eines gegebenen Funktionals I:

Lemma A4.2. *Sei $I\colon C_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ ein monotones lineares Funktional. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Teilmenge. Auf $C_c(U) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ ist I stetig.*

Beweis. Wir benutzen die Funktion φ_U aus Lemma A3.11. Für $f \in C_c(U)$ gilt

$$-\|f\|_\infty \varphi_U \le f \le \|f\|_\infty \varphi_U$$

(für $x \in U$ ist $\varphi_U(x) = 1$; für $x \notin U$ ist $f(x) = 0$). Weil I monoton ist, gilt

$$\big|I(f)\big| \le I(\varphi_U)\|f\|_\infty.$$

Das heißt, $I(\varphi_U)$ ist eine Lipschitzkonstante für das lineare Funktional I; damit ist I stetig. $\square$

a. Eine stetige Wavelet-Basis

Im letzten Semester zeigten wir, jede stetige Funktion (sogar jede Regelfunktion) ist ein gleichmäßiger Limes von Treppenfunktionen. Um weitere Eigenschaften des Integrals zu untersuchen, benutzen wir nicht mehr Treppenfunktionen (weil sie unstetig sind) sondern eine verwandte Familie von „Hutfunktionen“.

Definition A4.3. Sei $h \in C_c(\mathbb{R})$ die (stückweise lineare) „Hutfunktion“

$$h(t) := \max(0, 1 - |t|)$$

mit $\operatorname{supp} h = [-1, 1]$. (Dieses h ist übrigens die Funktion $\varphi_{\{0\}}$ aus Lemma A3.11.)

Eine wichtige Eigenschaft dieser Funktion ist folgendes: sie lässt sich als lineare Kombination skalierter Kopien von sich selbt schreiben. Sei $\sigma\colon x \mapsto 2x$ die Skalierung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir betrachten nun Skalierungen um Zweierpotenzen und Translationen um ganze Zahlen:

$$\sigma^m(x) = 2^m x \text{ für } m \in \mathbb{N}; \quad \tau_j(x) = x + j \text{ für } j \in \mathbb{Z}.$$

Definition A4.4. Für $j \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$h_j^m(x) = (h \circ \tau_j \circ \sigma^m)(x) = h(j + 2^m x).$$

`Ende der Vorlesung 2009 April 16`

Lemma A4.5. *Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gelten*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} h_j^m(x) \equiv 1$$

und

$$2h_j^m = h_{2j-1}^{m+1} + 2h_{2j}^{m+1} + 2h_{2j+1}^{m+1}, \quad \textit{insb.} \quad 2h = h_{-1}^1 + 2h_0^1 + h_1^1.$$

Beweis. (Aufgabe.) □

Bemerkung A4.6. Die letzte Formel können wir auch wie folgt schreiben:

$$2h_j^m = \sum_{k\in\{-1,0,1\}} 2^{1-|k|} h_{2j+k}^{m+1}.$$

Bemerkung A4.7. Wegen dieser Eigenschaften sind die Funktionen h_j^m eine Wavelet-Basis; für festes m auch eine Basis für lineare B-Splines. Ähnliche Eigenschaften haben schon die Treppenfunktionen. Für

$$g_j^m = \chi_{[0,1)} \circ \tau_j \circ \sigma^m$$

gelten nämlich $g_0^0 = g_0^1 + g_{-1}^1$ und $\sum_{j\in\mathbb{Z}} g_j^m(x) \equiv 1$. Der Vorteil der Hutfunktionen ist deren Stetigkeit. Mit Wavelets („Wellchen“) versteht man eigentlich noch glätteren (am besten C^∞) Basisfunktionen mit ähnlichen Eigenschaften.

Ähnliches können wir auch in höheren Dimensionen machen.

Definition A4.8. Sei $H \in C_c(\mathbb{R}^n)$ das Produkt

$$H(x) := \prod_{i=1}^n h(x_i) = h(x_1)h(x_2)\cdots h(x_n),$$

dessen Träger $\operatorname{supp} H = [-1,1]^n$ ist. (Dies ist der abgeschlossene Einheitsball in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der ℓ^∞-Norm.) Sei $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Skalierung $\sigma(x) = 2x$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ und für jedes „Multiindex“ $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n$ sei

$$H_{\mathbf{j}}^m(x) := (H \circ \tau_{\mathbf{j}} \circ \sigma^m)(x) = \prod_{i=1}^n h_{\mathbf{j}_i}^m(x_i).$$

Lemma A4.9. *Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gelten*

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} H_{\mathbf{j}}^m(x) \equiv 1 \quad \text{und} \quad 2^n H_{\mathbf{j}}^m = \sum_{\mathbf{k}\in\{-1,0,1\}^n} \Big(\prod_{i=1}^n 2^{1-|\mathbf{k}_i|}\Big) H_{2\mathbf{j}+\mathbf{k}}^{m+1}.$$

Beweis. Diese Formeln folgen aus der Definition von H mit Lemma A4.5 bzw. Bemerkung A4.6. Man benutzt einfach das Distributivgesetz. □

Satz A4.10. *Für $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und $m \in \mathbb{N}$ sei*

$$f_m(x) := \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} f(-2^{-m}\mathbf{j}) H_{\mathbf{j}}^m(x) \in C_c(\mathbb{R}^n),$$

eine Wavelet-Approximation *für f. Die Funktionen f_m konvergieren gleichmäßig gegen f.*

Bemerkung A4.11. Weil f kompakten Träger hat, ist $f(2^{-m}\mathbf{j})$ nur für endlich viele $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n$ ungleich Null. Das heißt, die Summe in der Formel für f_m ist eine endliche Summe und deshalb wohldefiniert. Auch deswegen hat f_m kompakten Träger.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Weil f kompakten Träger hat, ist f gleichmäßig stetig, d.h., zum gegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es $m > 0$ so, dass für $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x-y\|_\infty \le 2^{-m}$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Wir behaupten, $\|f - f_m\| < \varepsilon$.

Nun sei $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben und sei

$$A := \{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n : H_{\mathbf{j}}^m(x) \neq 0\} = \{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n : \|x + 2^{-m}\mathbf{j}\|_\infty < 2^{-m}\},$$

eine endliche (von x abhängige) Teilmenge aus $\mathbb{Z}^n$. Wir bemerken, $\sum_A H_{\mathbf{j}}^m(x) = \sum_{\mathbb{Z}^n} H_{\mathbf{j}}^m(x) = 1$. Nach Lemma A4.9 gilt

$$f(x) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} f(x) H_{\mathbf{j}}^m(x) = \sum_{\mathbf{j}\in A} f(x) H_{\mathbf{j}}^m(x)$$

und damit

$$\begin{aligned}\big|f(x) - f_m(x)\big| &= \Big|\sum_{\mathbf{j}\in A}\Big(f(x) - f(2^{-m}\mathbf{j})\Big) H_{\mathbf{j}}^m(x)\Big| \\ &\le \sum_{\mathbf{j}\in A} \Big|f(x) - f(2^{-m}\mathbf{j})\Big| H_{\mathbf{j}}^m(x) \\ &< \sum_{\mathbf{j}\in A} \varepsilon H_{\mathbf{j}}^m(x) \le \varepsilon \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} H_{\mathbf{j}}^m(x) = \varepsilon.\end{aligned}$$ □

b. *Folgerung für lineare Funktionale*

Lemma A4.12. *Sei $I\colon C_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ ein translationsinvariantes lineares Funktional und sei $c := I(H) \in \mathbb{R}$. Dann gilt $I(H_{\mathbf{j}}^m) = 2^{-mn}c$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n$.*

Beweis. Wegen der Translationsinvarianz ist $c_m := I(H_{\mathbf{j}}^m)$ unabhängig von $\mathbf{j}$. Nach Lemma A4.9 gilt dann

$$\begin{aligned}2^n c_m &= \sum_{\mathbf{k}\in\{-1,0,1\}^n} \Big(\prod_{i=1}^n 2^{1-|\mathbf{k}_i|}\Big) c_{m+1} \\ &= c_{m+1} \prod_{i=1}^n \Big(\sum_{k\in\{-1,0,1\}} 2^{1-|k|}\Big) = c_{m+1} 4^n,\end{aligned}$$

d.h., $c_{m+1} = 2^{-n} c_m$. Per Induktion folgt das Lemma. □

Jetzt können wir die Eindeutigkeit des Integrals (bis auf einen konstanten Faktor) beweisen:

Satz A4.13 (Eindeutigkeit des Integrals). *Sei $I\colon C_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional, das monoton und translationsinvariant ist, und sei $c := I(H) \ge 0$. Dann gilt $I(f) = c \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda$.*

Beweis. Wir definieren $J(f) := c \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda$ und möchten zeigen, $I = J$. Es gilt $J(H) = I(H)$ und deshalb nach dem Lemma $J(H_{\mathbf{j}}^m) = I(H_{\mathbf{j}}^m)$. Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und seien f_m die Wavelet-Approximationen aus Satz A4.10. Weil f_m eine lineare Kombination der Funktionen $H_{\mathbf{j}}^m$ ist und die beiden Funktionale linear sind, folgt $J(f_m) = I(f_m)$. Sei nun

$$U := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\|_\infty < 2 \forall y \in \operatorname{supp} f\};$$

für alle m gilt $\operatorname{supp} f_m \subset U$. (Warum?) Aus der Monotonie von I und J folgt nach Lemma A4.2, dass diese auf $C_c(U)$ stetig sind. Weil $f_m \to f$ gleichmäßig, gilt damit $J(f) = \lim J(f_m) = \lim I(f_m) = I(f)$. □

```
Ende der Vorlesung 2009 April 21
```

Bemerkung A4.14. Die Wavelet-Approximationen f_m zu einer gegebenen Funktion f haben wir oben durch Formeln beschrieben. Man kann auch einfach sagen, diese sind die stückweise multilineare Interpolationen der Werten von f auf einem kubischen Gitter. Wir betrachten zunächst den Fall $m = 0$. Da gilt $f_0(\mathbf{j}) = f(\mathbf{j})$ für $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n$; die Werte von f_0 auf jedem Einheitswürfel $\mathbf{j} + [0,1]^n$ hängen nur von den werten in den 2^n Ecken ab – und sind deren „multilineare“ Interpolation. (Für $n = 1$ ist f_0 die stückweise lineare Interpolation der Werte von f in den ganzen Zahlen $j \in \mathbb{Z}$.) Für allgemeines $m \geq 0$ läuft alles ähnlich indem wir einfach $\mathbb{Z}^n$ durch $2^{-m}\mathbb{Z}^n$ ersetzen. Der Name „Wavelet-Approximation“ ist zugestandenermaßen für diese einfache Interpolation ein bisschen übertrieben.

Bemerkung A4.15. Bezüglich der ℓ^∞-Norm ist H eine n-Lipschitzabbildung, d.h., $|H(x) - H(y)| \leq n\|x - y\|_\infty$. Es folgt, dass $2^m n$ eine Lipschitzkonstante für $H^m_{\mathbf{j}}$ ist.

A5. Substitutionsregel

Aus der Eindeutigkeit des Integrals schliessen wir zunächst Rotationsinvarianz und danach den linearen Fall

$$|\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f \circ A \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda.$$

der Substitutionsregel.

Lemma A5.1. *Für $A \in \mathsf{GL}(\mathbb{R}^n)$ sei $I\colon C_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ definiert durch $I(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f \circ A \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax)\, d\lambda(x)$. Dieses lineare Funktional ist monoton und translationsinvariant.*

Beweis. Linearität und Monotonie sind trivial. Für die Translationsinvarianz bemerken wir

$$(\tau_v \circ A)(x) = v + Ax = A(A^{-1}v + x) = (A \circ \tau_{A^{-1}v})(x).$$

Damit gilt

$$((f \circ \tau_v) \circ A)(x) = ((f \circ A) \circ \tau_{A^{-1}v})(x).$$

Daraus folgt

$$I(f \circ \tau_v) = \int_{\mathbb{R}^n} ((f \circ A) \circ \tau_{A^{-1}v}) \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ A) \, d\lambda = I(f). \quad \square$$

Satz A5.2 (Rotationsinvarianz). *Das Integral ist rotationsinvariant: für $A \in O(n)$ und $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f \circ A) \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda.$$

Beweis. Sei $A \in O(n)$ gegeben. Aus dem Eindeutigkeitssatz A4.13 und dem Lemma gibt es $c \geq 0$ so, dass für alle $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ gilt $\int_{\mathbb{R}^n} (f \circ A) \, d\lambda = c \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda$. Es gibt aber rotationsinvariante Funktionen, z.B. $\|x\|_2$ oder – mit kompaktem Träger –

$$f_0(x) := \max(0, 1 - \|x\|_2).$$

Wegen $f_0 \circ A = f_0$ muss gelten $c = 1$. $\square$

Bemerkung A5.3. Weil das Integral invariant unter Translationen und Rotationen ist, ist es unter alle euklidischen Bewegungen invariant.

Ganz einfach ist auch der Fall, dass A eine Diagonalmatrix ist.

Lemma A5.4. *Sei $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathsf{GL}(\mathbb{R}^n)$ eine Diagonalmatrix mit $a_i > 0$. Für $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\begin{aligned}\det A \int_{\mathbb{R}^n} f \circ A \, d\lambda &= a_1 \cdots a_n \int_{\mathbb{R}^n} f(a_1 x_1, \ldots, a_n x_n) \, dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda.\end{aligned}$$

Beweisskizze. Diese Lemma folgt aus n-facher Anwendung des Falles $n = 1$, welches der Spezialfall $\varphi(x) = ax$ im Satz A3.17 ist. $\square$

Ein bekanntes Lemma aus der linearen Algebra sagt, dass jede Matrix ein Produkt von Rotationen mit einer Diagonalmatrix ist:

Lemma A5.5 (Singulärwertzerlegung). *Sei $A \in \mathsf{GL}(\mathbb{R}^n)$. Es gibt $U, V \in O(n)$ und eine Diagonalmatrix D mit positiven Einträgen so, dass $A = UDV$.* $\square$

Satz A5.6. *Für $A \in \mathsf{GL}(\mathbb{R}^n)$ und $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$|\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f \circ A \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda.$$

Beweis. Mit der Singulärwertzerlegung schreiben wir $A = UDV$ und merken $\det D = |\det A|$. Der Satz folgt dann aus der Rotationsinvarianz A5.2 und dem Diagonalfall A5.4:

$$\begin{aligned}\det D \int_{\mathbb{R}^n} f \circ U \circ D \circ V \, d\lambda &= \det D \int_{\mathbb{R}^n} f \circ U \circ D \, d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f \circ U \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda. \quad \square\end{aligned}$$

a. *Hilfsätze*

Definition A5.7. Sei T eine echte Teilmenge in einem metrischen Raum (X, d). Wir definieren $r_T\colon X \to \mathbb{R}$ wie folgt: ist x ein innerer Punkt von T dann gilt

$$r_T(x) := \sup\{\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset T\} \in (0, \infty),$$

sonst gilt $r_T(x) = 0$.

Bemerkung A5.8. Es gilt $r_T(x) < \infty$ wegen $T \neq X$.

Bemerkung A5.9. Die Funktion r ist eine Lipschitzabbildung (mit Lipschitzkonstante 1 – warum?) und damit stetig.

Definition A5.10. Sei T eine Teilmenge in einem metrischen Raum (X, d). Für $h \geq 0$ definieren wir $S_h(T)$ als die Teilmenge der Punkte mit Abstand höchstens h von T, d.h.

$$S_h(T) := \{x \in X : \exists t \in T \text{ mit } d(x, t) \leq h\}.$$

Lemma A5.11. *Sei $U \subset (X, d)$ offen und sei $K \subset U$ kompakt. Dann gibt es $h > 0$ so, dass $S_h(K) \subset U$.*

Beweis. Wir betrachten die Funktion r_U, die auf U positiv ist. Auf der kompakten Menge K nimmt sie ihr Minumum m an, welches deshalb positiv ist. Für $h < m$ gilt $S_h(K) \subset U$. □

Lemma A5.12. *Ist $T \subset X$ abgeschlossen, dann ist auch $S_h(T)$ abgeschlossen für jedes $h \geq 0$.*

Beweis. Wir betrachten die stetige Funktion $r = r_{X \smallsetminus T}$. Es gilt $X \smallsetminus S_h(T) = \{x \in X : r(x) > h\}$; diese Menge – das Urbild von (h, ∞) unter r – ist offen. □

Korollar A5.13. *Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, dann ist auch $S_h(K)$ kompakt für jedes $h \geq 0$.*

Beweis. Weil K abgeschlossen ist, ist $S_h(K)$ abgeschlossen. Weil K beschränkt ist, gibt es $R > 0$ mit $K \subset B_R(0)$. Damit ist $S_h(K) \subset B_{R+h}(0)$ auch beschränkt. □

Bemerkung A5.14. Dies gilt nicht im Allgemeinen für $K \subset X$, z.B. wenn X ein nichtkompakter diskreter Raum ist.

Bemerkung A5.15. Wir haben schon (im Lemma A4.2) die Tatsache benutzt, dass für $U \subset X$ offen gilt natürlicherweise $C_c(U) \subset C_c(X)$: wir erweitern eine Funktion $f \in C_c(U)$ indem wir $f \equiv 0$ ausserhalb von U setzen.

Lemma A5.16. *Seien $U, V \subset X$ offen und sei $\varphi\colon U \to V$ ein Homöomorphismus. Für $f \in C_c(V)$ gilt $f \circ \varphi \in C_c(U)$.*

Beweis. Sei $K := \operatorname{supp} f \subset V$. Weil K kompakt ist und φ^{-1} stetig ist, ist $\operatorname{supp}(f \circ \varphi) = \varphi^{-1}(K) \subset U$ kompakt. □

`Ende der Vorlesung 2009 April 23`

Lemma A5.17. *Seien K und X metrische Räume, K kompakt. Sei $f\colon K \to X$ stetig. Für $m \in \mathbb{N}$ setzen wir*

$$s_m := \sup\Big\{d\big(f(a), f(b)\big) : a, b \in K,\ d(a, b) \leq 2^{-m}\Big\} \geq 0.$$

Dann ist (s_m) eine monotone Nullfolge.

Beweis. Weil die Mengen in den Suprema immer kleiner werden, ist (s_m) monoton fallend. Weil f gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass für $2^{-m} < \delta$ gilt $s_m < \varepsilon$. □

Lemma A5.18. *Seien V und W endlich-dimensionale Banachräume, sei $G \subset V$ offen, und sei $\varphi\colon G \to W$ stetig differenzierbar. Für $p \in G$ sei $T_p = T^{\varphi}_{1,p}$ das erste Taylorpolynom von φ, d.h.*

$$T_p(x) := \varphi(p) + D_p\varphi(x - p).$$

Nun sei $K \subset G$ kompakt. Es gibt $C \in [0, \infty)$ und eine monotone Nullfolge (s_m) mit den folgenden Eigenschaften: Es gelten $C < \infty$ und $s_m \to 0$. Liegt eine Strecke $\overline{px}$ in K, dann gilt

$$\|\varphi(x) - \varphi(p)\| \leq C\|x - p\|.$$

Falls auch $\|x - p\| \leq 2^{-m}$, dann gilt

$$\|\varphi(x) - T_p(x)\| \leq s_m\|x - p\|.$$

Bemerkung A5.19. Die erste Schranke kann man auch so formulieren: für jede konvexe Teilmenge $T \subset K$ ist C eine Lipschitzkonstante für $\varphi|_T$.

Beweis. Wir nehmen an, $K \neq \varnothing$, weil sonst gibt es nichts zu zeigen. Die Operatornorm $\|D\varphi\|$ der Ableitung $D\varphi$ ist eine stetige Funktion $G \to \mathbb{R}$. Wir setzen $C := \sup_K \|D\varphi\|$. Weil K kompakt ist, gilt $C \in [0, \infty)$.

Nun betrachten wir $\overline{xp} \subset K$. Für $t \in [0, 1]$ parametrisieren wir diese Strecke durch $\gamma(t) := (1 - t)p + tx = p + t(x - p)$. Es gilt

$$(\varphi \circ \gamma)'(t) = D_{\gamma(t)}\varphi(\gamma'(t)) = D_{\gamma(t)}\varphi(x - p)$$

und damit

$$\big\|(\varphi \circ \gamma)'(t)\big\| \leq \big\|D_{\gamma(t)}\varphi\big\|\,\|x - p\| \leq C\|x - p\|.$$

Nach Satz II.D3.4 (mit $M = C\|x - p\|$) gilt

$$\big\|\varphi(x) - \varphi(p)\big\| = \big\|\varphi \circ \gamma(1) - \varphi \circ \gamma(0)\big\| \leq (1 - 0)M = C\|x - p\|.$$

Wir wenden Lemma A5.17 auf $D\varphi\colon K \to L(V, W)$ an und definieren damit die monotone Nullfolge s_m. Nun wenden wir den Hauptsatz II.D5.4 auf $\varphi \circ \gamma$ (d.h. entlang der Strecke $\overline{xp}$) an. Es gilt $\varphi(x) - \varphi(p) = \int_0^1 D_{p+t(x-p)}\varphi(x - p)\,dt$ und deswegen

$$\varphi(x) - T_p(x) = \int_0^1 \Big(D_{p+t(x-p)}\varphi - D_p\varphi\Big)(x - p)\,dt.$$

Damit gilt die gewünschte Abschätzung:

$$\|\varphi(x) - T_p(x)\| \leq \int_0^1 \big\|D_{p+t(x-p)}\varphi - D_p\varphi\big\|\,\|x - p\|\,dt \leq s_m\|x - p\|.$$

□

b. Der Satz

Bemerkung A5.20. Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C_c(U)$ schreiben wir $\int_U f\,d\lambda := \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda$.

Jetzt beweisen wir die allgemeine Substitutionsregel:

Satz A5.21 (Substitutionsregel). *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Für $f \in C_c(V)$ gilt*

$$\int_U f(\varphi(x))\,|\det D_x\varphi|\,d\lambda(x) = \int_V f(y)\,d\lambda(y).$$

Beweis. Wir benutzen immer die Norm $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$. Für $f \in C_c(V)$ schreiben wir den Fehler in der Formel als

$$F(f) := \int_U f(\varphi(x))\,|\det D_x\varphi|\,d\lambda(x) - \int_V f(y)\,d\lambda(y),$$

ein lineares Funktional.

Wir setzen

$$L' := \operatorname{supp} f \subset V, \qquad K' := \operatorname{supp}(f \circ \varphi) = \varphi^{-1}(L') \subset U.$$

Es gibt $h > 0$ mit

$$L := S_h(L') \subset V, \qquad K := S_h(K') \subset U.$$

Wir setzen

$$C := \max\Big(\sup_K \|D\varphi\|, \sup_L \big\|D\varphi^{-1}\big\|\Big).$$

Seien nun $p \in K'$, $q := \varphi(p) \in L'$ und $\varepsilon \le {}^h\!/_C$. Nach dem Lemma gilt

$$\varphi(S_\varepsilon\{p\}) \subset S_{C\varepsilon}\{q\} \subset L, \qquad \varphi^{-1}(S_\varepsilon\{q\}) \subset S_{C\varepsilon}\{p\} \subset K.$$

Ferner sei (s_m) die monotone Nullfolge für $D\varphi$ aus Lemma A5.17.

Wir wählen $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n$ so, dass $2^{-m} \le {}^h\!/_C$ und $q := -2^{-m}\mathbf{j} \in L'$, und betrachten $H^m_{\mathbf{j}}$ mit $\operatorname{supp} H^m_{\mathbf{j}} = S_{2^{-m}}\{q\} \subset L$. Wir beweisen zunächst eine Annäherung der gewünschten Formel für den Fall $f = H^m_{\mathbf{j}}$.

Lemma A5.22. *Unabhängig von* $\mathbf{j}$ *können wir eine monotone Nullfolge* t_m *so finden, dass*

$$\begin{aligned}\big|F(H^m_{\mathbf{j}})\big| &= \Big|\int_U H^m_{\mathbf{j}}(\varphi(x))\,|\det D_x\varphi|\,d\lambda(x) - \int_V H^m_{\mathbf{j}}(y)\,d\lambda(y)\Big| \\ &\le t_m 2^{-nm}.\end{aligned}$$

Beweis. Wir setzen $p := \varphi^{-1}(q)$ und schreiben

$$T_p(x) := q + D_p\varphi(x-p)$$

für $x \in U$. Sei $S := S_{2^{-m}C}\{p\}$ der Würfel um p. Es gelten

$$\operatorname{supp}(H^m_{\mathbf{j}} \circ \varphi) \subset S \subset K, \qquad \operatorname{supp}(H^m_{\mathbf{j}} \circ T_p) \subset S \subset K.$$

Weil $2^m n$ eine Lipschitzkonstante für $H^m_{\mathbf{j}}$ ist, gilt dann

$$\begin{aligned}\Big|H^m_{\mathbf{j}}(\varphi(x)) - H^m_{\mathbf{j}}(T_p(x))\Big| &\le 2^m n\|\varphi(x) - T_p(x)\| \\ &\le 2^m n s_m \|x-p\| \le Cns_m\end{aligned}$$

für alle $x \in U$.

Weil $|\det D\varphi|$ gleichmäßig stetig auf K ist, können wir eine Schranke $|\det D\varphi| \le C'$ und eine monotone Nullfolge s'_m nach Lemma A5.17 wählen. Wegen $|H| \le 1$ gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\Big|H^m_{\mathbf{j}}(\varphi(x))\,|\det D_x\varphi| - H^m_{\mathbf{j}}(T_p(x))\,|\det D_p\varphi|\Big| \le C'Cns_m + s'_m.$$

Jetzt können wir das Integral

$$I_1 := \int_U H^m_{\mathbf{j}}(\varphi(x))\,|\det D_x\varphi|\,d\lambda(x)$$

mit dem Integral

$$I_2 := \int_U H^m_{\mathbf{j}}(T_p(x))\,|\det D_p\varphi|\,d\lambda(x)$$

vergleichen. Es gilt

$$\begin{aligned}\big|I_1 - I_2\big| &\le \int_S C'Cns_m + s'_m\,d\lambda \\ &\le (2C2^{-m})^n(C'Cns_m + s'_m) =: t_m 2^{-nm},\end{aligned}$$

wobei (t_m) die gesuchte monotone Nullfolge ist. Weil T_p affinlinear ist, kennen wir schon die Substitutionsregel für T_p, d.h.,

$$I_2 = \int_V H^m_{\mathbf{j}}(y)\,d\lambda(y). \qquad \square$$

Um den Satz jetzt zu beweisen, seien f_m die Wavelet-Approximationen zu f. Wir betrachten weiterhin nur große Werte für m mit $2^{-m} \le {}^h\!/_C$. Dann gilt $\operatorname{supp} f_m \subset L$. Wir setzen $g(x) := f(\varphi(x))\,|\det D_x\varphi|$ und $g_m(x) := f_m(\varphi(x))\,|\det D_x\varphi|$. Es gilt $\operatorname{supp} g_m \subset K$. Wir haben gleichmäßige Konvergenz $f_m \to f$ und $g_m \to g$ (warum?). Nach Lemma A4.2 gilt

$$\int_V f_m\,d\lambda \to \int_V f\,d\lambda, \qquad \int_U g_m\,d\lambda \to \int_V g\,d\lambda.$$

Es gilt $F(f_m) = \int_V f_m\,d\lambda - \int_U g_m\,d\lambda$ und reicht aus zu zeigen, dass $F(f_m) \to 0$. Die Approximation f_m ist eine lineare Kombination von Hutfunktionen $H^m_{\mathbf{j}}$, für die wir den Fehler abgeschätzt haben:

$$f_m(x) := \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n} f(-2^{-m}\mathbf{j})H^m_{\mathbf{j}}(x).$$

Wir können R so wählen, dass $L' \subset B_R(0)$. Dann gibt es höchtens $(2^{m+1}R)^n$ Summanden in dieser Formel. Ferner sei $M := \sup_L |f(x)|$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\big|F(f_m)\big| &= \Big|\sum f(-2^{-m}\mathbf{j})F(H^m_{\mathbf{j}})\Big| \\ &\le (2^{m+1}R)^n M t_m 2^{-nm} = (2R)^n M t_m \to 0. \qquad \square\end{aligned}$$

```
Ende der Vorlesung 2009 April 28
```

A6. Halbstetige Funktionen

In diesem Abschnitt, sei (X,d) ein metrischer Raum. Wir betrachten Funktionen auf X mit Werten in den erweiterten reellen Zahlen $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (vgl. I.D4).

Definition A6.1. Die Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist im Punkt $p \in X$ *von unten halbstetig*, falls

$$f(p) \le \varliminf_{x\to p} f(x);$$

sie ist in p *von oben halbstetig*, falls

$$f(p) \ge \varlimsup_{x\to p} f(x).$$

Die Funktion f heißt (auf X) *von unten* (bzw. *von oben*) *halbstetig*, falls sie in jedem Punkt $p \in X$ von unten (bzw. von oben) halbstetig ist.

Bemerkung A6.2. Eine Funktion f ist genau dann von unten halbstetig, wenn $-f$ von oben halbstetig ist.

Beispiel A6.3. Die „größte ganze“ Funktion $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ist von oben halbstetig, während $x \mapsto \lceil x \rceil$ von unten halbstetig ist.

Lemma A6.4. *Die Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann im Punkt $p \in X$ von unten halbstetig, wenn zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $f(p) \in (a, +\infty]$ (d.h. mit $a < f(p)$) es eine offene Umgebung $U \ni p$ in X gibt mit $f(U) \subset (a, +\infty]$. Sie ist genau dann in p von oben halbstetig, wenn zu jedem $b \in \mathbb{R}$ mit $f(p) \in [-\infty, b)$ es eine offene Umgebung $U \ni p$ gibt mit $f(U) \subset [-\infty, b)$.*

Beweis. (Aufgabe.) □

Korollar A6.5. *Eine Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann von unten (bzw. von oben) halbstetig, wenn jedes Intervall der Form $(a, +\infty]$ (bzw. der Form $[-\infty, b)$) ein offenes Urbild hat.*

Beweis. Sei f von unten halbstetig, sei $a \in \mathbb{R}$ und sei

$$V := f^{-1}((a, +\infty]).$$

Wir müssen zeigen, dass jeder Punkt $p \in V$ innerer Punkt ist. Aber $p \in V$ heißt, dass $a < f(p)$; nach dem Lemma gibt es eine offene Umgebung $p \in U \subset V$. Die andere Richtung folgt noch schneller aus dem Lemma. □

Beispiel A6.6. Sei $T \subset X$ eine Teilmenge. Die charakteristische Funktion χ_T ist genau dann von unten (bzw. von oben) halbstetig, wenn T offen (bzw. abgeschlossen) in X ist.

Bemerkung A6.7. Halbstetigkeit von unten für eine Funktion $X \to \mathbb{R}$ ist Stetigkeit bezüglich einer seltsamen Topologie auf $\mathbb{R}$. In dieser Topologie (die von keiner Metrik kommt) sind nur die Mengen $(a, +\infty)$ offen.

Lemma A6.8. *Die Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann in $p \in X$ stetig, wenn sie in p von unten* und *von oben halbstetig ist. Sie ist genau dann (auf X) stetig, wenn sie von unten und von oben halbstetig ist.*

Beweis. Es existiert $\lim_{x\to p} f(x)$ genau dann, wenn

$$\varliminf_{x\to p} f(x) = \varlimsup_{x\to p} f(x).$$

Die Funktion f ist genau dann in p stetig, wenn dieser Limes existiert und gleich $f(p)$ ist; sie ist von beiden Seiten halbstetig genau dann, wenn

$$f(p) \le \varliminf_{x\to p} \le \varlimsup_{x\to p} \le f(p).$$ □

Bemerkung A6.9. Mit der Charakterisierung aus Lemma A6.4 kann man auch wie folgt argumentieren: Jedes offene Intervall (a, b) ist ein Durchschnitt $(a, +\infty] \cap [-\infty, b)$.

Bemerkung A6.10. Für Abbildungen $[a, b] \to Y$ betrachteten wir im letzten Semester links- und rechtsseitige Grenzwerte. Für Funktionen $X \to \overline{\mathbb{R}}$ betrachten wir jetzt Halbstetigkeit von oben und unten. Für $f\colon [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ können wir diese Begriffe vergleichen. Nehmen wir an, es existieren in $p \in (a, b)$ die beiden einseitigen Grenzwerte $f^{\pm}(p)$. Es gelten dann

$$\varliminf_{x\to p} f(x) = \min(f^-(p), f^+(p)),$$
$$\varlimsup_{x\to p} f(x) = \max(f^-(p), f^+(p)).$$

Das heißt, f ist genau dann in p von unten halbstetig, wenn $f(p) \le \min(f^-(p), f^+(p))$. Man könnte z.B. sagen, f ist in p „stetig von links", falls $f^-(p) = f(p)$; diese Bedingung ist aber nicht sehr wichtig.

Satz A6.11. *Sei K ein folgenkompakter Raum. Jede von unten halbstetige Funktion $f\colon K \to \overline{\mathbb{R}}$ nimmt ihr Minimum auf K an, d.h. es gibt $p \in K$ mit $f(p) \le f(x)$ für alle $x \in K$. Ähnlich nimmt jede von oben stetige Funktion ihr Maximum auf K an.*

Beweis. Sei $a := \inf f(K) \in \overline{\mathbb{R}}$ das Infimum der Werte von f. Es gibt eine Folge (x_k) in K mit $f(x_k) \to a$. Wegen Folgenkompaktheit gibt es eine konvergente Teilfolge (x_{m_k}) mit Limes $p \in K$. Weil f von unten halbstetig ist, gilt

$$f(p) \le \varliminf_{x\to p} f(x) \le \lim_{k\to\infty} f(x_{m_k}) = a = \inf_{x\in K} f(x).$$

Deshalb gilt $f(p) = a$ und $f(p) \le f(x)$ für alle $x \in K$. □

Bemerkung A6.12. Halbstetige Funktionen sind wegen dieses Satzes in der mathematischen Optimierung sehr wichtig.

a. *Monotone Folgen*

Wir möchten die Klasse integrierbare Funktionen erweitern, indem wir Grenzwerte betrachten. Punktweise Konvergenz von stetigen Funktionen ist zu schwach, weil wir fast keine Kontrolle über den Grenzwert haben. Andererseits liefert uns gleichmäßiger Konvergenz nichts neues (vgl. II.B8.17).

Mit monotonen Funktionenfolgen kommen wir weiter. Wir wissen, dass jede monotone Folge in $\mathbb{R}$ einen Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ hat (I.D4.5). Das heißt erstens, dass jede monotone Funktionenfolge puntkweise konvergiert, und zweitens, dass deren Integrale auch konvergieren. Es sind genau die halbstetigen Funktionen, die wir auf diese Weise erreichen.

Zunächst untersuchen wir den Fall, dass der Limes stetig ist.

Satz A6.13 (Satz von Dini). *Sei K ein kompakter Raum und sei (f_k) eine monotone Folge stetiger Funktionen $K \to \mathbb{R}$. Sei $f\colon K \to \overline{\mathbb{R}}$ der punktweise Limes. Die Konvergenz $f_k \to f$ ist genau dann gleichmäßig, wenn f stetig ist mit Werten in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Eine Richtung wissen wir schon: konvergiert $f_n \to f$ gleichmäßig, dann ist f stetig (II.B8.15) und nimmt nicht die Werte $\pm\infty$ an. (Wir betrachten $\overline{\mathbb{R}}$ als Raum mit einer „erweiterten Metrik", die den Wert $+\infty$ annehmen darf: $d(a, +\infty) = +\infty$. Dann macht der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz Sinn.)

Umgekehrt nehmen wir an, der Limes $f\colon K \to \mathbb{R}$ ist stetig. Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $g_k = f - f_k$. Dann ist (g_k) eine monotone Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen Null konvergieren. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen

$$U_k := g_k^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)) = \Big\{x \in K : \big|g(x)\big| < \varepsilon\Big\}.$$

Dann ist (U_k) eine Folge offener Teilmengen in K, die monoton ist im Sinne, dass $U_k \subset U_{k+1}$. Für jedes $x \in K$ gilt

$g_k(x) \to 0$, d.h., $x \in U_k$ für fast alle m. Damit ist $\bigcup U_k = K$, d.h., $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ ist eine offene Überdeckung von K. Weil K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Damit gibt es $k \in \mathbb{N}$ so, dass $U_k = K$, d.h., $\left|f(x) - f_k(x)\right| < \varepsilon$ für alle $x \in K$. Dies ist die Definition gleichmäßiger Konvergenz. □

Korollar A6.14. *Sei (f_k) eine monotone Folge in $C_c(\mathbb{R}^n)$, die punktweise gegen $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ konvergiert. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\, d\lambda.$$

Beweis. Weil die Werte von f_k zwischen denen von f_0 und von f liegen, gilt

$$\operatorname{supp} f_k \subset \operatorname{supp} f_0 \cup \operatorname{supp} f =: K.$$

Nach dem Satz ist dann die Konvergenz $f_k \to f$ gleichmäßig. Wir wählen eine beschränkte offene Menge $U \supset K$ und betrachten $f_k, f \in C_c(U)$. Nach Lemma A4.2 konvergieren die Integrale. □

```
Ende der Vorlesung 2009 April 30
```

Jetzt kommen wir zum Fall eines unstetigen Grenzwerts.

Lemma A6.15. *Sei F eine beliebige Familie von Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, die jeweils von unten halbstetig sind. Sei $\hat{f} := \sup_F f$ deren Supremum, d.h.,*

$$\hat{f}(x) := \sup_{f\in F} f(x).$$

Dann ist auch $\hat{f}$ von unten halbstetig.

Beweis. Es gilt $\hat{f}(p) > a$ genau dann, wenn es $f \in F$ gibt mit $f(p) > a$. Das heißt,

$$\hat{f}^{-1}((a, +\infty]) = \bigcup_{f\in F} f^{-1}((a, +\infty]).$$

Die Aussage folgt deshalb, weil eine beliebige Vereinigung offener Mengen offen ist. □

Bemerkung A6.16. Ähnlich gilt, dass das Infimum einer beliebigen Familie von oben halbstetiger Funktionen auch von oben halbstetig ist. Tauschen wir Infimum und Supremum, gelten die Aussagen nur für endliche Familien, weil wir in diesem Fall Durschnitte offener Mengen betrachten.

Korollar A6.17. *Sei (f_k) eine monoton steigende Folge stetiger Funktionen $X \to \mathbb{R}$. Der Limes $h: X \to \overline{\mathbb{R}}$,*

$$h(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \sup_k f_k(x),$$

ist von unten halbstetig.

Beweis. Dies ist ein Spezialfall des Lemmas. Wir bemerken, h nimmt den Wert $-\infty$ nicht an. □

Definition A6.18. Wir schreiben $f_k \uparrow h$, falls (f_k) eine monoton steigende Funktionenfolge ist, die (punktweise) gegen h konvergiert,

Beispiel A6.19. Die charakteristische Funktion χ_U einer offenen Teilmenge $U \subset X$ ist von unten halbstetig. Sei $r_U : X \to \mathbb{R}$ die Funktion aus A5.7 (der Abstand zum Komplement von U) und sei

$$f_k(x) := \max\{1,\, k\, r_U(x)\}.$$

Dann konvergiert $f_k \uparrow \chi_U$.

Bemerkung A6.20. Weil 1 eine Lipschitzkonstante für r_U ist, ist k eine Lipschitzkonstante für f_k. Man kann zeigen, f_k ist die größte Funktion mit dieser Lipschitzkonstante, die kleiner oder gleich χ_U ist. Eine Funktionenfolge mit genau dieser Eigenschaft konstruieren wir auch im folgenden Beweis.

Satz A6.21. *Sei K ein kompakter metrischer Raum und sei $h: K \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine von unten halbstetige Funktion. Dann gibt es eine monoton steigende Folge stetiger Funktionen $f_k : K \to \mathbb{R}$ mit $f_k \uparrow h$.*

Beweis. Nach Satz A6.11 nimmt h auf K sein Minimum $b > -\infty$ an. Im Fall $b = +\infty$ gilt $h \equiv +\infty$ und wir setzen einfach $f_k :\equiv m$. Sonst setzen wir

$$f_k(x) := \min_{t\in K}\Big(h(t) + kd(t, x)\Big).$$

Es ist klar, dass für jedes $x \in K$ gilt

$$b = f_0(x) \le f_1(x) \le \cdots \le f_k(x) \le h(x).$$

Die Funktion f_k hat Lipschitzkonstante k, weil für $x, y \in K$ gilt

$$\begin{aligned} f_k(y) &= \min_{t\in K}\Big(h(t) + kd(t, y)\Big) \\ &\le \min_{t\in K}\Big(h(t) + kd(t, x) + kd(x, y)\Big) \\ &= f_k(x) + md(x, y). \end{aligned}$$

Damit ist $b + m \operatorname{diam}(K)$ eine obere Schranke für f_k, insbesondere nimmt f_k den Wert $+\infty$ nicht an.

Weil (f_k) eine monotone Folge ist, hat sie einen Limes $g: K \to \overline{\mathbb{R}}$. Wegen $f_k \le h$ gilt auch $g \le h$; wir müssen zeigen, $g \ge h$. Dazu seien $x \in K$ und $a < h(x)$ gegeben; wir behaupten, wir können $m \in \mathbb{N}$ so finden, dass $f_k(x) \ge a$. Damit gilt $g(x) \ge a$ und damit (weil $a < h(x)$ beliebig war) auch $g(x) \ge h(x)$.

Nun beweisen wir die Behauptung. Weil h halbstetig ist, gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $h(t) > a$ für alle $t \in B_\varepsilon(x)$. Nun wählen wir $k \ge {}^{(a-b)}/_{\varepsilon}$. Für $t \in B_\varepsilon(x)$ gilt $h(t) + kd(t, x) \ge h(t) > a$. Für $t \notin B_\varepsilon(x)$ gilt $h(t) + kd(t, x) \ge a + k\varepsilon \ge a$. Damit ist – wie gewünscht –

$$f_k(x) = \min_{t\in K}\Big(h(t) + kd(t, x)\Big) \ge a. \qquad \square$$

Auf einem kompakten Raum haben wir jetzt halbstetige Funktionen als monotone Grenzwerte stetiger Funktionen charakterisiert. Wie sieht es aber aus im nichtkompakten Raum $\mathbb{R}^n$, wenn die stetigen Funktionen kompakte Träger haben?

Bemerkung A6.22. Sei X ein beliebiger Raum, sei (f_k) eine monoton steigende Folge in $C_c(X)$ und sei $h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ deren Limes: $f_k \uparrow h$. Nach Korollar A6.17 ist h von unten halbstetig. Ausserhalb des kompakten Trägers $\operatorname{supp}(f_0)$ gilt natürlich $h \geq 0$.

Definition A6.23. Sei X ein metrischer Raum. Wir schreiben $\mathcal{H}^+(X)$ für die Menge aller von unten halbstetigen Funktionen $h\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ mit folgender Eigenschaft: es gibt eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ mit $h(x) \geq 0$ für alle $x \notin K$.

Bemerkung A6.24. Sei (f_k) eine monoton steigende Folge in $\mathcal{H}^+(X)$. Dann gehört der Limes $f_k \uparrow h$ ebenfalls zu $\mathcal{H}^+(X)$.

Satz A6.25. *Es gilt $h \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn es eine monoton steigende Folge (f_k) in $C_c(\mathbb{R}^n)$ gibt mit $f_k \uparrow h$.*

Beweisskizze. Eine Richtung folgt direkt aus der letzten Bemerkung. Für die andere Richtung kann man den Beweis von Satz A6.21 leicht anpassen. Sei $h \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es $R > 0$ so, dass $h(x) \geq 0$ für $\|x\| \geq R$. Sei g_k die charakteristische Funktion des Balls $B_{R+k}(0)$. Dann sind auch g_k und $g_k h$ halbstetig und es gilt $g_k n \uparrow h$. Wir setzen

$$f_k(x) := \inf_{t\in\mathbb{R}^n}\Big(g_k(t)h(t) + k\|x-t\|\Big).$$

Diese sind wieder Lipschitzabbildungen und man kann wie oben zeigen, es gilt $f_k \uparrow h$. $\square$

Bemerkung A6.26. Es gilt $-h \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ (d.h., h ist von oben halbstetig und $h \leq 0$ ausserhalb einer kompakten Menge) genau dann, wenn es eine monoton *fallende* Folge in $C_c(\mathbb{R}^n)$ gibt, die gegen h konvergiert.

Beispiel A6.27. Sei χ_T die charakteristische Funktion einer Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^n$. Es gilt $\chi_T \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn T offen ist; es gilt $-\chi_T \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn T kompakt ist.

Lemma A6.28. *Sei (f_k) eine monoton steigende Folge in $C_c(\mathbb{R}^n)$ und sei $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $g \leq \lim f_k$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\,d\lambda \leq \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k\,d\lambda.$$

Bemerkung A6.29. Wegen der Monotonie des Integrals ist $\left(\int f_k\right)$ eine monotone Folge in $\mathbb{R}$ und hat deshalb einen Grenzwert.

Beweis. Wir setzen $g_k := \min(g, f_k) \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $g_k \uparrow g$ und deshalb nach Korollar A6.14 gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\,d\lambda = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} g_k\,d\lambda \leq \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k\,d\lambda. \qquad \square$$

`Ende der Vorlesung 2009 Mai 5`

Korollar A6.30. *Seien (f_k) und (g_k) zwei monotone Folgen in $C_c(\mathbb{R}^n)$, die denselben Grenzwert $h \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ haben: $f_k \uparrow h$ und $g_k \uparrow h$. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k\,d\lambda = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} g_k\,d\lambda.$$

Beweis. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt nach dem Lemma $\int_{\mathbb{R}^n} f_j\,d\lambda \leq \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} g_k\,d\lambda$. Damit gilt $\lim_j \int_{\mathbb{R}^n} f_j\,d\lambda \leq \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} g_k\,d\lambda$. Symmetrisch gilt auch $\lim_j \int_{\mathbb{R}^n} g_j\,d\lambda \leq \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,d\lambda$. $\square$

Definition A6.31. Sei $h \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$. Wir wählen $f_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \uparrow h$. Wir definieren wie folgt das Integral:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\,d\lambda := \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k\,d\lambda \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}.$$

Bemerkung A6.32. Dass der Grenzwert unabhängig von der gewählten Folge f_k ist, zeigt das letzte Korollar. Dass diese Definition im Falle $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit der ursprünglichen übereinstimmt, folgt aus Korollar A6.14.

Satz A6.33. *Seien $f, g \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ und sei $c > 0$. Dann ist $f + cg \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + cg\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda + c\int_{\mathbb{R}^n} g\,d\lambda.$$

Falls $f \leq g$, gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^n} g\,d\lambda$.

Beweis. (Aufgabe.) $\square$

Bemerkung A6.34. Das Integral ist damit monoton und additiv. Die Summe $f(x)+cg(x)$ macht in jedem Punkt x Sinn, weil $\infty - \infty$ nie auftaucht. Wir erlauben nicht $c < 0$, weil vielleicht $-g \notin \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$. Später erweitern wir natürlich das Integral so, dass $\int -g = -\int g$.

Satz A6.35 (Substitutionsregel). *Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Für $f \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ gehören auch $f\circ\varphi$ und $|\det D\varphi|\ f\circ\varphi$ zu $\mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\circ\varphi\ |\det D\varphi|\ d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda.$$

Beweis. Es gibt eine Folge $f_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \uparrow f$. Dann ist auch $(f_k\circ\varphi)$ monoton steigend und es gilt $f_k\circ\varphi \uparrow f\circ\varphi$; deshalb gilt $f\circ\varphi \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$. (Aufgabe: direkt aus der Definition von $\mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ zeigen, dass $f\circ\varphi \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$.) Weil $|\det D\varphi|$ positiv und stetig ist, gilt auch

$$|\det D\varphi|\ f_k\circ\varphi \uparrow |\det D\varphi|\ f\circ\varphi \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n).$$

Nach der Substitutionsregel für stetige Funktionen gilt für jedes k

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k\circ\varphi\ |\det D\varphi|\ d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,d\lambda.$$

Im Limes $k \to \infty$ folgt die gewünschte Gleichung. $\square$

Beispiel A6.36. Sei $A \in \mathsf{GL}(\mathbb{R}^n)$ und sei $v \in \mathbb{R}^n$. Für $f \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ gehört auch die Funktion $x \mapsto f(Ax+v)$ zu $\mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$|\det A|\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b)\,d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda.$$

Das Integral einer stetigen Funktion in $C_c(\mathbb{R}^n)$ wurde iterativ in Koordinaten definiert. Der nächste Satz sagt etwa, dasselbe gilt auch für halbstetige Funktionen.

Satz A6.37 (Fubini). *Sei $f \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^{n+m})$. Für festes $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ gehört die Funktion*

$$f^y\colon (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

zu $\mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$, hat also ein Integral

$$\begin{aligned} F(y) &:= \int_{\mathbb{R}^n} f^y(x)\,d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)\,dx_1 \cdots dx_n. \end{aligned}$$

Die damit definierte Funktion F gehort zu $\mathcal{H}^+(\mathbb{R}^m)$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} F\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f\,d\lambda.$$

Beweis. Wir wählen eine Folge $f_k \in C_c(\mathbb{R}^{n+m})$ mit $f_k \uparrow f$. Für $y \in \mathbb{R}^m$ definieren wir $f_k^y \in C_c(\mathbb{R}^n)$ analog zu f^y und $F_k(y) := \int f_k^y$ analog zu F. Nach Satz A3.2 (mehrfach angewandt) ist F_k stetig, gehört also zu $C_c(\mathbb{R}^m)$. Nach der Definition des Integrals für stetige Funktionen gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} F_k\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_k\,d\lambda.$$

Nun gilt $f_k^y \uparrow f^y$ und deshalb $F_k \uparrow F$. Die gewünschte Aussage folgt aus der Definition des Integrals für halbstetige Funktionen. □

Die Additivität des Integrals gilt auch für unendliche Reihensummen, solange die Gleider nichtnegativ sind.

Lemma A6.38. *Sei $0 \le h \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es $0 \le g_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $h = \sum g_k$.*

Beweis. Sei (f_k) eine monotone Folge in $C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \uparrow h$. Indem wir f_k durch $\max(0, f_k)$ ersetzen, dürfen wir annehmen, dass $f_k \ge 0$. Dann setzen wir einfach $g_k := f_k - f_{k-1}$ (wobei $f_{-1} = 0$). □

Satz A6.39. *Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $g_i \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ eine nichtnegative Funktion $g_i \ge 0$. Sei $h \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ die Reihensumme $h(x) := \sum g_i(x)$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{i=0}^{\infty} g_i\Big)\,d\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_i\,d\lambda.$$

Beweis. Weil jede Partialsumme kleiner oder gleich h ist, gilt auch für die Reihensumme der Integrale, dass

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_i\,d\lambda \le \int_{\mathbb{R}^n} h\,d\lambda.$$

Um die andere Ungleichung zu beweisen, wenden wir das Lemma auf jedes g_i an: Für $i, j \in \mathbb{N}$ gibt es $0 \le g_{ij} \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\sum_j g_{ij} = g_i$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$0 \le f_k := \sum_{i+j=k} g_{ij} = g_{0k} + \cdots + g_{k0} \in C_c(\mathbb{R}^n).$$

Für die Partialsummen gilt

$$\sum_{k=0}^{m} f_k \le \sum_{i,j=0}^{m} g_{ij} \le \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\infty} g_{ij} = \sum_{i=0}^{m} g_i \le h.$$

Wegen der Monotonie und Additivität des Integrals gilt

$$\sum_{k=0}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,d\lambda \le \sum_{i=0}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} g_i\,d\lambda.$$

Damit gilt im Limes $m \to \infty$, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,d\lambda \le \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_i\,d\lambda$$

aber auch, dass $\sum f_k \le h$.

Wir behaupten $h = \sum f_k$. Dann konvergieren die (stetigen!) Partialsummen mononton gegen h. Damit nach der Definition des Integrals gilt wie gewünscht

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\,d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,d\lambda \le \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_i\,d\lambda.$$

Um die Behauptung zu beweisen, sei $x \in \mathbb{R}^n$, sei $a < h(x)$ und sei $\varepsilon > 0$. Es reicht aus zu zeigen, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $\sum_{k=0}^{2m} f_k(x) > a - \varepsilon$. Zunächst gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass $\sum_{i=0}^{k} g_i(x) > a$. Für jedes $i \le k$ gibt es dann $k_i \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\sum_{j=0}^{k_i} g_{ij}(x) > g_i(x) - \varepsilon/k.$$

Wir setzen $m = \max(k, k_0, k_1, \dots, k_k)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2m} f_k(x) &\ge \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} g_{ij}(x) \ge \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k_i} g_{ij}(x) \\ &> \sum_{i=0}^{k} \Big(g_i(x) - \varepsilon/k\Big) > a - \varepsilon. \end{aligned}$$ □

Bemerkung A6.40. Der Beweis erinnert an den Beweis der Cauchyproduktformel II.C3.24. Tatsächlich ist $g_{ij}(x)$ in jedem Punkt x eine absolut konvergente Doppelreihe (vgl. II.C3.25). Jede Umordnung davon konvergiert gegen $g(x)$. (Siehe auch Amman/Escher Theorem II.8.10.) Die Behauptung oben ist nur ein Spezialfall.

```
Ende der Vorlesung 2009 Mai 7
```

A7. Integrierbare Funktionen

Definition A7.1. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine beliebige Funktion. Wir definieren das *Oberintegral*

$$\int^* f\,d\lambda := \inf\Big\{\int_{\mathbb{R}^n} h\,d\lambda : f \le h \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)\Big\}$$

und das *Unterintegral*

$$\int_* f\,d\lambda := -\int^* -f\,d\lambda.$$

Bemerkung A7.2. Weil $h \equiv +\infty$ immer erlaubt ist, ist die Menge im Infimum nie leer.

Lemma A7.3. *Für $f \le g$ gelten $\int^* f\,d\lambda \le \int^* g\,d\lambda$ und $\int_* f\,d\lambda \le \int_* g\,d\lambda$.*

Beweis. Die erste Ungleichung folgt, weil

$$\{h \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n) : h \ge g\} \subset \{h \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n) : h \ge f\} \qquad \square$$

Lemma A7.4. *Für jedes f gilt $\int_* f\,d\lambda \le \int^* f\,d\lambda$.*

Beweis. Sei $f \le h \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ und sei $-f \le h' \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$. Wegen $0 \le h + h'$ gilt $0 \le \int h + \int h'$. Weil dies für alle $h \ge f$ bzw. $h' \ge -f$ gilt, gilt auch die gewünschte Ungleichung

$$0 \le \int^* f\,d\lambda + \int^* -f\,d\lambda. \qquad \square$$

Lemma A7.5. *Für jedes $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ und jedes $0 < c \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int^* cf\,d\lambda = c\int^* f\,d\lambda.$$

Beweis. (Aufgabe.) $\square$

Lemma A7.6. *Für $k \in \mathbb{N}$ sei $0 \le f_k : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine nichtnegative Funktion. Dann gilt*

$$\int^* \Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big)\,d\lambda \le \sum_{k=0}^{\infty} \int^* f_k\,d\lambda.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für jedes k wählen wir $f_k \le h_k \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_k\,d\lambda \le \int^* f_k\,d\lambda + 2^{-k}\varepsilon.$$

Nach Satz A6.39 gehört auch die Summe $h := \sum h_k$ zu $\mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\,d\lambda = \sum \int_{\mathbb{R}^n} h\,d\lambda_k \le \sum \int^* f_k\,d\lambda + \varepsilon \sum 2^{-k}.$$

Wegen $\sum f_k \le h$ gilt dann

$$\int^* (\textstyle\sum f_k)\,d\lambda \le \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} h\,d\lambda = \sum\Big(\int^* f_k\,d\lambda\Big) + 2\varepsilon.$$

Wei ε beliebig war, folgt die gewünschte Ungleichung. $\square$

Lemma A7.7. *Für jedes $h \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\int_* h\,d\lambda = \int^* h\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} h\,d\lambda.$$

Beweis. Wegen $h \le h$ ist es klar, dass $\int^* h\,d\lambda = \int h\,d\lambda$. Damit gilt auch $\int_* h\,d\lambda \le \int h\,d\lambda$ und wir müssen nur noch zeigen, dass $\int_* h\,d\lambda \ge \int h\,d\lambda$. Dazu sei $f_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \uparrow h$. Damit ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\,d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,d\lambda = \sup_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,d\lambda.$$

Es gilt $-h \le -f_k \in C_c(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ und damit

$$\int^* -h\,d\lambda \le \inf_k \int_{\mathbb{R}^n} -f_k\,d\lambda,$$

was äquivalent zur gewünschten Ungleichung ist. $\square$

Definition A7.8. Falls $\int_* f\,d\lambda = \int^* f\,d\lambda$, nennen wir den gemeinsamen Wert das *(Lebesgue-)Integral* $\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Falls das Lebesgue-Integral existert und endlich ist, sagen wir, f ist *(Lebesgue-)integrierbar*.

Beispiel A7.9. Sei $h \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ eine halbstetige Funktion. Das Lebesgue-Integral von h gleicht dem Integral aus Definition A6.31. Wir sehen, dass h genau dann Lebesgue-integrierbar ist, wenn $\int_{\mathbb{R}^n} h\,d\lambda < +\infty$.

Definition A7.10. Sei $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ der Raum aller Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Der Unterraum aller reellen Funktionen ist ein Vektorraum, $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ aber nicht ganz, weil die arithmetischen Verknüpfungen nicht immer auf $\overline{\mathbb{R}}$ definiert sind. Für $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ vereinbaren wir, dass $0f \equiv 0$ (auch wenn f die Werte $\pm\infty$ annimmt). Damit ist $cf \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ für alle $c \in \mathbb{R}$ erklärt. Seien $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ und sei $A := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = g(x) = \pm\infty\}$. Genau in den Punkten $x \in A$ hat $f(x) - g(x)$ keine Bedeutung. Wenn wir trotzdem eine Aussage über $f - g$ schreiben, heißt das, die Aussage gilt für jede Funktion, die ausserhalb von A mit $f + g$ übereinstimmt. (Die Werte der Funktion auf A sind beliebig.) Ähnliches gilt natürlich für die Summe $f + g$.

Beispiel A7.11. Seien $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Es gilt (punktweise) die Dreiecksungleichung $|f+g| \le |f|+|g|$. In einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, wo die Summe $f(x) + g(x)$ nicht erklärt ist, gilt notwendigerweise $|f| + |g| = +\infty$. Deshalb gilt die Dreiecksungleichung unabhängig davon, welchen Wert wir für $(f + g)(x)$ wählen. Als Folgerung gilt auch die Dreiecksungleichung für unendliche Reihen:

$$\Big|\sum f_k\Big| \le \sum |f_k|.$$

Definition A7.12. Wir definieren durch $\|f\|_{L^1} := \int^* |f|\,d\lambda$ eine Abbildung $\|\cdot\|_{L^1} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$, die wir die L^1-*Pseudonorm* nennen.

Bemerkung A7.13. Natürlich kann die Pseudonorm $\|\cdot\|_{L^1}$ keine Norm sein, weil $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ kein Vektorraum ist. Sie nimmt auch den Wert $+\infty$ an und ist nicht definit: es gibt $f \ne 0$ mit $\|f\|_{L^1} = 0$. Es gelten aber Homogenität und die Dreiecksungleichung.

Beispiel A7.14. Für $c \in \overline{\mathbb{R}}$ sei f_c die Funktion

$$f_c(x) := \begin{cases} 0, & x \ne 0, \\ c, & x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt $\|f_c\|_{L^1} = 0$ (auch für $c = \pm\infty$). (Aufgabe: zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $h \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ finden mit $h \ge f_\infty$ und $\int_{\mathbb{R}^n} h\,d\lambda < \varepsilon$.)

Lemma A7.15. *Seien $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten*

$$\|cf\|_{L^1} = |c|\,\|f\|_{L^1},$$
$$\|f + g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}.$$

Beweis. (Aufgabe.) □

Korollar A7.16. *Sei $f_k \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ für $k \in \mathbb{N}$. Es gilt*

$$\Big\|\sum f_k\Big\|_{L^1} \le \sum \|f_k\|_{L^1}.$$

Beweis. Nach Lemma A7.6 und Beispiel A7.11 gilt

$$\int^* \Big|\sum f_k\Big|\,d\lambda \le \int^* \Big(\sum |f_k|\Big)\,d\lambda \le \sum_{k=0}^{\infty} \int^* |f_k|\,d\lambda. \qquad \square$$

Satz A7.17. *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann integrierbar, wenn es eine Folge (f_k) in $C_c(\mathbb{R}^n)$ gibt mit*

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^1}.$$

(Wir sagen, f_k konvergiert in L^1 *gegen f.) Es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,d\lambda.$$

Beweis. Sei zunächst f integrierbar und sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir wählen $f \le h^+ \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda \le \int_{\mathbb{R}^n} h^+\,d\lambda < \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda + 2^{-k}.$$

Ähnlich wählen wir $-f \le h^- \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ mit

$$-\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda \le \int_{\mathbb{R}^n} h^-\,d\lambda < -\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda + 2^{-k}.$$

Dann gilt $0 \le h^+ - f \le h^+ h^- \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\big\|f - h^+\big\| = \int_{\mathbb{R}^n} h^+ - f\,d\lambda \le \int_{\mathbb{R}^n} h^+\,d\lambda + \int_{\mathbb{R}^n} h^-\,d\lambda < 2^{1-k}.$$

Weiter gibt es Nach der Definition des Integrals für halbstetige Funktionen gibt es $h^+ \ge f_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\big\|f_k - h\big\| \le 2^{1-k}$. Nach der Dreiecksungleichung gilt dann $\big\|f - f_k\big\| \le 2^{2-k}$. Damit konvergieren f_k gegen f in L^1.

`Ende der Vorlesung 2009 Mai 12`

Umgekehrt nehmen wir an, dass $f_k \to f$ in L^1. D.h., zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein k mit $\|f - f_k\|_{L^1} < \varepsilon$. Nach der Definition des Oberintegrals heißt das, es gibt $h \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ mit $|f - f_k| \le h$ und $\int_{\mathbb{R}^n} h\,d\lambda < \varepsilon$.

Wir setzen $h^\pm := h \pm f_k \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$. Damit gilt $-h^- \le f \le h^+$ und deswegen

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f_k\,d\lambda - \varepsilon < -\int_{\mathbb{R}^n} h^-\,d\lambda \le \int_* f\,d\lambda \\ \le \int^* f\,d\lambda \le \int_{\mathbb{R}^n} h^+\,d\lambda < \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,d\lambda + \varepsilon.\end{aligned}$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt, dass

$$\int_* f\,d\lambda = \int^* f\,d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,d\lambda. \qquad \square$$

Bemerkung A7.18. Wäre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ein Vektorraum und wäre $\|\cdot\|_{L^1}$ darauf eine Norm, könnten wir diesen Satz wie folgt erklären: Der Unterraum $C_c(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ist dicht und das Lebesgue-Integral ist die (eindeutige) stetige Erweiterung auf $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ des Integrals auf $C_c(\mathbb{R}^n)$.

Definition A7.19. Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Wir definieren den Positiv- bzw. Negativteil $f_\pm$ durch

$$f_\pm(x) := \max\big(0, \pm f(x)\big) = \frac{1}{2}\big(f \pm |f|\big).$$

Es gelten $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

Satz A7.20. *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann integrierbar, wenn f_+ und f_- integrierbar sind. In diesem Fall ist auch $|f|$ integrierbar.*

Beweis. Sei $f_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ in L^1. Es gehören auch $f_{k,\pm}$ und $|f_k|$ zu $C_c(\mathbb{R}^n)$ und wegen

$$\big|f_{k,\pm} - f_\pm\big| \le \big|f_k - f\big| \quad \text{und} \quad \Big|\big|f_k\big| - \big|f\big|\Big| \le \big|f_k - f\big|$$

konvergieren auch $f_{k,\pm} \to f_\pm$ und $\big|f_k\big| \to \big|f\big|$ in L^1.

Umgekehrt nehmen wir an, $f_\pm$ sind integrierbar. Wir finden Folgen $(f_{\pm,k})$, die gegen $f_\pm$ in L^1 konvergieren. Dann konvergiert die Folge $(f_{+,k} - f_{-,k})$ gegen f in L^1. □

Bemerkung A7.21. Es kann sein, dass $|f|$ integrierbar ist, f aber nicht. Zum Beispiel mit $n = 1$ kann es sein, dass $|f| = \chi_{[0,1]}$ aber das Vorzeichen von f wechselt so wild, dass f gar nicht integrierbar ist. Um ein genaues Beispiel zu konstruiren, müssen wir nichtmeßbare Teilmengen kennenlernen.

Definition A7.22. Sei W ein endlich-dimensionaler Banachraum mit Basis $\{w_i\}$. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to W$ können wir als $f = \sum f_i w_i$ mit $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ schreiben. Wir sagen, f ist *integrierbar*, falls jedes f_i integrierbar ist. In diesem Fall definieren wir das Lebesgue-Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda := \sum \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_i\,d\lambda\Big) w_i \in W.$$

(Diese Definition hängt nicht von der gewählten Basis ab, wie man leicht aus der Linearität des Integrals sieht.)

Beispiel A7.23. Ein wichtiger Fall ist $W = \mathbb{C}$.

Lemma A7.24. *Ist $f : \mathbb{R}^n \to W$ integrierbar, dann ist auch die Norm $\|f\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar.*

Beweis. (Aufgabe.) □

Bemerkung A7.25. Später werden wir zeigen, dass

$$\Big\|\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda\Big\| \le \int_{\mathbb{R}^n} \big\|f\big\|\,d\lambda.$$

(Satz A7.20 ist etwa der Fall $W = \mathbb{R}$.) Als Aufgabe könnte man diese Ungleichung jetzt beweisen im Spezialfall, dass die Norm aus einer Skalarprodukt auf W definiert ist.

A8. Äußeres Maß und Nullmengen

Definition A8.1. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und sei χ_A deren charakteristische Funktion. Das *äußere (Lebesgue-)Maß* von A ist

$$\lambda^*(A) := \int^* \chi_A \, d\lambda = \|\chi_A\|_{L^1} \in [0, +\infty].$$

Falls $\lambda^*(A) = 0$, dann heißt A *Nullmenge*.

Lemma A8.2. *Das äußere Maß ist rotations- und translationsinvariant.*

Beweis. (Aufgabe.) □

Satz A8.3. *Es gilt $\lambda^*(\varnothing) = 0$. Für $A \subset B$ gilt $\lambda^*(A) \le \lambda^*(B)$. Ist $A_k \subset \mathbb{R}^n$ für $k \in \mathbb{N}$, dann gilt*

$$\lambda^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(A_k).$$

Beweis. Wegen $\chi_\varnothing \equiv 0$ ist die erste Aussage trivial. Wegen $\chi_A \le \chi_B$ folgt die zweite aus der Monotonie des Oberintegrals (Lemma A7.3). Wegen $\chi_{\bigcup A_k} \le \sum \chi_{A_k}$ folgt die dritte aus Lemma A7.6. □

Korollar A8.4. [Vgl. I.G2.5.] *Jede Teilmenge einer Nullmenge ist selbst Nullmenge. Jede Vereinigung $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ abzählbar vieler Nullmengen $A_k \subset \mathbb{R}^n$ ist selbst wieder eine Nullmenge.* □

Beispiel A8.5. [Vgl. I.G2.4.] Jede einelementige Menge $\{p\} \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge, deswegen auch jede abzählbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$. (Z.B. $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge.) D.h., jede Menge A mit positivem äußerem Maß $\lambda^*(A) > 0$ ist überabzählbar.

a. „Fast überall"

Definition A8.6. Sei $E(x)$ eine Aussage für Punkte $x \in \mathbb{R}^n$. Wir sagen, E gilt *fast überall*, falls die Menge aller Punkte x, in denen $E(x)$ nicht gilt, eine Nullmenge ist.

Beispiel A8.7. Seien $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt

$$f = g \text{ fast überall} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda^*\Big\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \ne g(x)\Big\} = 0.$$

Bemerkung A8.8. Auf der Menge $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ist „fast überall gleich" eine Äquivalenzrelation. (Transitivität folgt deswegen, weil $\{f \ne h\} \subset \{f \ne g\} \cup \{g \ne h\}$.)

Definition A8.9. Für eine beliegibe Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ sei $u_A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ die Funktion $u_A := \sum_{k=0}^{\infty} \chi_A$, d.h.,

$$u_A(x) := \begin{cases} +\infty, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

(Weil $\infty \cdot 0$ unerklärt ist, schreiben wir nicht $u_A = \infty\chi_A$.)

Satz A8.10. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine beliebige Funktion. Dann gilt $\|f\|_{L^1} = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast überall.*

Beweis. Sei $A := \{x : f(x) \ne 0\}$. Zunächst nehmen wir an, A ist eine Nullmenge. Wir benutzen die Funktion $u_A \ge |f|$. Es folgt, dass

$$\|f\|_{L^1} = \int^* |f| \, d\lambda \le \int^* u_A \, d\lambda \le \sum_{k=0}^{\infty} \int^* \chi_A \, d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^*(A) = 0.$$

Umgekehrt, sei $\|f\|_{L^1} = 0$. Wir setzen

$$A_k := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > 1/k\}.$$

Wegen $\chi_{A_k} \le k|f|$ ist jedes A_k eine Nullmenge. Es gilt aber $A = \bigcup A_k$, deshalb ist auch A eine Nullmenge. □

Satz A8.11. *Sei $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f\|_{L^1} < +\infty$. Es gilt $|f| < +\infty$ fast überall, d.h., $f(x) \in \mathbb{R}$ fast überall.*

Beweis. Sei $A := \{x : f(x) = \pm\infty\}$; wir betrachten nochmal die Funktion u_A. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $|f| \ge u_A > k\chi_A$ und deswegen

$$\|f\|_{L^1} = \int^* |f| \, d\lambda \ge \int^* u_A \, d\lambda \ge k\lambda^*(A).$$

Ist A keine Nullmenge, gilt deshalb $\|f\|_{L^1} = +\infty$. □

`Ende der Vorlesung 2009 Mai 14`

Korollar A8.12. *Sei $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f\|_{L^1} < +\infty$. Dann existiert eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $g = f$ fast überall.* □

Lemma A8.13. *Falls $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ integrierbar ist und $f = g$ fast überall, dann ist auch g integrierbar und es gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} g \, d\lambda$.*

Beweis. Sei $f = g$ ausserhalb der Nullmenge A, und sei (f_k) eine Folge in $C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ in L^1. Dann gilt punktweise

$$|g - f_k| \le |f - f_k| + u_A$$

und deshalb

$$\|g - f_k\|_{L^1} \le \|f - f_k\|_{L^1} + \|u_A\|_{L^1} = \|f - f_k\|_{L^1}$$

Das heißt $f_k \to g$ ebenfalls in L^1. Nach Satz A7.17 ist dann $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} g \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda$. □

Beispiele A8.14.

- Die charakteristische Funktion $\chi_\mathbb{Q}$ ist Lebesgue-integrierbar (obwohl nicht Riemann-integrierbar); es gilt $\int_\mathbb{R} \chi_\mathbb{Q} \, d\lambda = 0$.
- Sei $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann ist $(1 - \chi_{\mathbb{Q}^n})f$ auch integrierbar – mit dem selben Integral.

b. Äußeres Maß geometrisch gesehen

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, dann wissen wir, dass χ_U integrierbar ist; wir verstehen das Integral als Volumen von U. Die nächsten Sätze untersuchen die Beziehungen (bezüglich äußeres Maß) zwischen allgemeinen Teilmengen, offenen Teilmengen und kompakten Quadern.

Satz A8.15. *Für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\lambda^*(A) = \inf\Big\{\lambda^*(U) : A \subset U \subset \mathbb{R}^n,\ U \text{ offen}\Big\}.$$

Beweis. (Aufgabe.) □

Definition A8.16. Sei $[0,1)^n \subset \mathbb{R}^n$ der halboffene Einheitswürfel. Für $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n$ sei

$$W_{\mathbf{j}}^m := \sigma^{-m}\Big(\tau_{\mathbf{j}}([0,1)^n)\Big),$$

ein *dyadischer Würfel* (oder *dyadische Elementarzelle*) mit Seitenlänge $1/2^m$.

Bemerkung A8.17. Es gibt abzählbar viele dyadische Würfel. Seien $W_{\mathbf{j}}^m$ und $W_{\mathbf{j}'}^{m'}$ zwei dyadische Würfel mit $m' \leq m$. Entweder sind die Beiden disjunkt oder es gilt $W_{\mathbf{j}'}^{m'} \subset W_{\mathbf{j}}^m$.

Lemma A8.18. *Jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist die Vereinigung disjunkter dyadischer Würfel.*

Beweisskizze. Zunächst sei I_0 die Vereinigung aller Würfel $W_{\mathbf{j}}^0$, die in U enthalten sind. Induktiv sei I_m die Vereinigung aller Würfel $W_{\mathbf{j}}^m$, die in U aber nicht in $\bigcup_{i<m} I_i$ enthalten sind. Dann gilt $U = \bigcup_m I_m$. □

Korollar A8.19. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Wir betrachten abzählbare Familien $\{Q_k\}$ kompakter Quader mit $A \subset \bigcup Q_k$. Es gilt*

$$\lambda^*(A) = \inf\Big\{\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_k) : A \subset \bigcup Q_k,\ Q_k \text{ kompakte Quader}\Big\}.$$

Beweis. Ist $A \subset \bigcup Q_k$ dann gilt $\chi_A \leq \sum \chi_{Q_k}$ und deshalb $\lambda^*(A) \leq \sum \mathrm{vol}(Q_k)$. Dass wir im Infimum Gleichheit erreichen, folgt direkt aus dem Lemma, dem letzten Satz und der Tatsache, dass die abgeschlossene Hülle einer Elementarzelle denselben Volumen hat. □

c. Das Bild einer Nullmenge

Jetzt möchten wir das Bild einer Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ unter einer Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ untersuchen. Unter welchen Bedingungen ist $\varphi(A)$ eine Nullmenge?

Beispiel A8.20. Stetigkeit von φ reicht nicht aus. Sei $C \subset [0,1]$ die Cantormenge aus I.G2.8, und sei $f : [0,1] \to [0,1]$ die stetige Cantorfunktion aus I.G2.12. Dann ist C eine Nullmenge (vgl. I.G2.11). Es gilt aber $f(C) = [0,1]$ (vgl. I.G2.13).

Definition A8.21. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen metrische Räume heißt *lokal Lipschitz-stetig*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U so hat, dass $f|_U$ eine Lipschitzabbildung ist.

Bemerkung A8.22. Jede lokal Lipschitz-stetige Abbildung ist stetig. Jede Lipschitzabbildung ist lokal Lipschitz-stetig.

Lemma A8.23. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Dann ist φ lokal Lipschitz-stetig.*

Beweis. Zu jedem $x \in U$ gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass der abgeschlossene Ball $\overline{B}_\varepsilon(x)$ in U enthalten ist. Weil dieser Ball konvex und kompakt ist, ist φ darauf nach Lemma A5.18 eine Lipschitzabbildung. □

Lemma A8.24. *Sei $f\colon X \to Y$ lokal Lipschitz-stetig und sei $K \subset X$ kompakt. Dann ist $f|_K$ eine Lipschitzabbildung.*

Beweis. Für jedes $x \in K$ gibt es $\varepsilon(x) > 0$ und $C(x)$ so, dass $C(x)$ eine Lipschitzkonstante für f auf $B_{2\varepsilon(x)}(x)$ ist. Weil $\{B_{\varepsilon(x)}(x) : x \in K\}$ eine offene Überdeckung von K ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. D.h., es gibt endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_N \in K$ mit $K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_N$, wobei $U_k := B_{\varepsilon(x_k)}(x_k)$. Nun sei $\delta := \min_k \varepsilon(x_k) > 0$ und sei $D := \mathrm{diam}\, f(K) < \infty$. Wir setzen $C := \max(D/\delta, C(x_1), \ldots, C(x_N))$ und behaupten, dass C eine Lipschitzkonstante für $f|_K$ ist.

Seien $x, y \in K$. Gilt $d(x,y) \geq \delta$, dann folgt

$$d(f(x), f(y)) \leq D \leq C\delta \leq Cd(x,y).$$

Ist hingegen $d(x,y) < \delta$, dann wählen wir k mit $x \in U_k$. Wegen $\delta \leq \varepsilon(x_k)$ gilt $x, y \in B_{2\varepsilon(x_k)}(x_k)$ und deshalb

$$d(f(x), f(y)) \leq C(x_k)d(x,y) \leq Cd(x,y).$$ □

Bemerkung A8.25. Dieses Lemma kann man schneller beweisen, indem man Lemma II.B6.20 benutzt: jede Überdeckung eines kompakten metrischen Raumes hat eine Lebesguezahl.

Satz A8.26. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und sei $A \subset U$ eine Nullmenge. Dann ist das Bild $\varphi(A)$ eine Nullmenge.*

`Ende der Vorlesung 2009 Mai 19`

Beweis. Die offfene Menge U ist eine abzählbare Vereinigung kompakter Würfel $K \subset U$. Deshalb genügt es zu zeigen, dass $\varphi(A \cap K)$ eine Nullmenge ist. Nach dem Lemma gibt es eine Lipschitzkonstante C für $\varphi|_K$.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine abzählbare Vereinigung kompakter Würfel W_k mit $\sum \mathrm{vol}(W_k) < \varepsilon$ und $A \cap K \subset \bigcup W_k$. Wir dürfen annehmen, $W_k \subset K$. Sei p_k der Mittelpunkt und $2s_k$ die Seitenlänge von W_k. Es gilt $W_k \subset B_{s_k\sqrt{n}}(p_k)$ und deshalb

$$\varphi(W_k) \subset B_{Cs_k\sqrt{n}}(\varphi(p_k)).$$

Damit ist $\varphi(W_k)$ in einem Würfel von Seitenlänge $2Cs_k\sqrt{n}$ enthalten, dessen Volumen $(\sqrt{n}C)^n \mathrm{vol}(W_k)$ ist. Es folgt, dass $\varphi(A \cap K)$ in einer abzählbaren Vereinigung kompakter Würfel mit Volumensumme $(\sqrt{n}C)^n\varepsilon$ liegt. Weil dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, ist $\varphi(A \cap K)$ eine Nullmenge. □

d. *Integrierbare Mengen und Lebesgue-Maß*

Definition A8.27. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *integrierbar*, falls die charakteristische Funktion χ_A integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\operatorname{vol}(A) := \lambda(A) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \, d\lambda = \lambda^*(A) \in [0, +\infty)$$

das *Volumen* oder *(Lebesgue-)Maß* von A.

Beispiel A8.28. Jede kompakte Teilmenge sowie jede beschränkte offene Teilmenge ist integrierbar. Für jedes $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt natürlich $\int_* \chi_A \, d\lambda \geq 0$; deswegen ist jede Nullmenge integrierbar mit vol $= 0$.

Lemma A8.29. *Seien f und g integrierbar, g beschränkt. Dann ist auch fg integrierbar.*

Beweis. Wir zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $h \in C_c(\mathbb{R}^n)$ so gibt, dass $\|h - fg\|_{L^1} < 2\varepsilon$. Nach Satz A7.17 ist dann fg integrierbar.

Sei M eine Schranke: $|g| \leq M$. Weil f integrierbar ist, existiert $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\varphi - f\|_{L^1} < \varepsilon/M$. Auch wenn f unbeschränkt ist, ist φ (als stetige Funktion mit kompaktem Träger) beschränkt:

$$|\varphi| \leq N := \sup|\varphi| < \infty.$$

Weil g integrierbar ist, existiert $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\psi - g\|_{L^1} < \varepsilon/N$. Nun sei $h := \varphi\psi$. Es gilt

$$\left|fg - h\right| = \left|(f - \varphi)g + \varphi(g - \psi)\right| \leq M\left|f - \varphi\right| + N\left|g - \psi\right|$$

und deswegen

$$\|fg - h\|_{L^1} \leq M\|f - \varphi\|_{L^1} + N\|g - \psi\|_{L^1} < \varepsilon + \varepsilon. \qquad \square$$

Satz A8.30. *Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ integrierbare Teilmengen. Dann sind auch $A \cap B$, $A \cup B$ und $A \setminus B$ integrierbar. Es gelten*

$$\lambda(A) + \lambda(B) = \lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B),$$
$$\lambda(A) = \lambda(A \cap B) + \lambda(A \setminus B).$$

Beweis. Es gelten für die charakteristichen Funktionen

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B, \quad \chi_A + \chi_B = \chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B}, \quad \chi_A = \chi_{A\cap B} + \chi_{A\setminus B}.$$

Die Integrierbarkeit von $\chi_{A\cap B}$ folgt deshalb aus Satz A8.29. Die Integrierbarkeit der anderen Mengen und die beiden Formeln folgen dann aus der Linearität des Integrals. $\square$

Definition A8.31. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und sei $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Die *triviale Fortsetzung* $\overline{f} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ist durch

$$\overline{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

definiert. Falls $\overline{f}$ integrierbar ist, setzen wir

$$\int_A f \, d\lambda := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f} \, d\lambda$$

und sagen, dass f *integrierbar über* A ist.

Beispiel A8.32. Sei $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ integrierbar und sei $A \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar. Die Funktion $f|_A$ hat Fortsetzung $\chi_A f$ und ist deswegen nach Satz A8.29 über A integrierbar.

Lemma A8.33. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$. Jede stetige Funktion $f: K \to \mathbb{R}$ ist über K integrierbar.*

Beweis. Sei $C \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke: $f(x) \leq C$. Wir wissen, dass χ_K integrierbar ist, und betrachten die Funktion $g := \overline{f} - C\chi_K$. Es gilt $g \leq 0$ und deshalb ist g auch in ∂K von unten halbstetig, d.h. $g \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$. Weil $\int_{\mathbb{R}^n} g \, d\lambda \leq 0 < +\infty$ ist g integrierbar. Deswegen ist auch die Summe $\overline{f} = g + C\chi_K$ integrierbar. $\square$