B. EIGENSCHAFTEN DES LEBESGUE-INTEGRALS

Das Lebesgue-Integral ist deswegen wichtig, weil man viele schöne Sätze darüber beweisen kann. Die Konvergenzsätze z.B. sind sehr nützlich.

B1. Konvergenzsätze

Der Satz über monotone Konvergenz ist Beppo Levi bzw. Henri Lebesgue zugeschrieben.

Satz B1.1 (Satz über monotone Konvergenz). *Sei (f_k) eine monotone Folge integrierbarer Funktionen $f_k \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Sei $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ der punktweise Limes $f = \lim_k f_k$. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda.$$

Beweis. Ohne Einschränkung nehmen wir an, die Folge ist monoton steigend. Ohne Einschränkung haben die integrierbaren Funktionen f_k Werte aus $\mathbb{R}$. (Dies gilt sowieso fast überall, d.h. ausserhalb einer Nullmenge N – wir änderen die Werte einfach so, dass für alle k gilt $f_k \equiv 0$ auf N.)

Weil die reelle Folge $(\int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\lambda)$ monoton steigend ist, existiert

$$M := \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Wegen $f \geq f_k$ ist es klar, dass $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda \geq M$. Damit ist der Fall $M = +\infty$ erledigt.

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt nach Korollar A7.16

$$\begin{aligned} \|f - f_m\|_{L^1} &= \Big\| \sum_{j=m}^{\infty} f_{j+1} - f_j \Big\|_{L^1} \\ &\leq \sum_{j=m}^{\infty} \big\| f_{j+1} - f_j \big\|_{L^1} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=m}^{k-1} \int_{\mathbb{R}^n} f_{j+1} - f_j \, d\lambda \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k - f_m \, d\lambda = M - \int_{\mathbb{R}^n} f_m \, d\lambda. \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen k groß genug, dass $\|f - f_k\|_{L^1} \leq M - \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\lambda < \varepsilon$. Weil f_k integrierbar ist, gibt es $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f_k - g\|_{L^1} < \varepsilon$. Daraus folgt $\|f - g\|_{L^1} < 2\varepsilon$ aber auch

$$\Big| M - \int_{\mathbb{R}^n} g \, d\lambda \Big| \leq M - \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\lambda + \Big| \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\lambda - \int_{\mathbb{R}^n} g \, d\lambda \Big| < 2\varepsilon.$$

Nach Satz A7.17 ist dann f integrierbar mit $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = M$. □

Beispiele B1.2.

- Sei $A_0 \subset A_1 \subset \cdots$ eine Folge integrierbarer Teilmengen $A_k \subset \mathbb{R}^n$. Falls die Folge $(\lambda(A_k))$ beschränkt ist, dann ist die Vereinigung $\bigcup A_k$ integrierbar mit $\lambda(A) = \lim \lambda(A_k)$.
- Seien $A_k \subset \mathbb{R}^n$ disjunkte integrierbare Mengen. Falls $\sum \lambda(A_k) < \infty$, dann ist die Vereinigung $\bigcup A_k$ integrierbar mit $\lambda(\bigcup A_k) = \sum \lambda(A_k)$.
- Sei $A_0 \supset A_1 \supset \cdots$ eine Folge integrierbarer Teilmengen $A_k \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist der Durchschnitt $\bigcap A_k$ integrierbar mit $\lambda(A) = \lim \lambda(A_k)$.

`Ende der Vorlesung 2009 Mai 26`

Satz B1.3 (Lemma von Fatou). *Seien $f_k \colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ nichtnegative, integrierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \underline{\lim}_{k\to\infty} f_k \, d\lambda \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\lambda.$$

Beispiel B1.4. Die Ungleichung kann strikt sein. Z.B. sei $f_k = k\chi_{[0,1/k]}$. Dann gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\lambda = 1$ aber $\lim f_k \equiv 0$ ausserhalb des Punktes $x = 0$. Wenn man hier f_k durch $-f_k$ ersetzt, wird es klar, warum die Nichtnegativität wichtig ist.

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $g_k := \inf_{m\geq k} f_m$. Dann ist (g_k) eine monoton steigende Folge, die per Definition gegen $f := \underline{\lim} f_k$ konvergiert. Nach dem Satz B1.1 über monotone Konvergenz folgt, dass $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \lim \int_{\mathbb{R}^n} g_k \, d\lambda$. Für $k \leq m$ gilt $g_k \leq f_m$ und deshalb

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k \, d\lambda \leq \inf_{m\geq k} \int_{\mathbb{R}^n} f_m \, d\lambda.$$

Damit gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \, d\lambda \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\lambda. \qquad \square$$

Korollar B1.5. *Sei (f_k) eine Folge in $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Gibt es eine integrierbare Funktion g mit $f_k \leq g$ für alle k, dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\lim} f_k \, d\lambda \geq \overline{\lim} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\lambda.$$

Beweis. (Aufgabe.) □

Definition B1.6. Sei (f_k) eine Folge in $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Wir sagen, f_k *konvergiert fast überall* gegen $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, falls $f_k(x) \to f(x)$ für alle x ausserhalb einer Nullmenge.

Satz B1.7 (Satz über dominierte Konvergenz). *Sei (f_k) eine Folge integrierbarer Funktionen, die fast überall gegen $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert. Sei $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ eine integrierbare Funktion, die die Folge (f_k)* dominiert *im Sinne, dass $|f_k| \leq g$ für alle k. Dann ist f integrierbar und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\lambda.$$

Beweis. Indem wir die Werte der Funktionen auf einer Nullmenge ändern, dürfen wir annehmen, die Konvergenz ist punktweise. Es gilt $|f - f_k| \leq 2g$ und

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |f - f_k| = 0.$$

Nach dem Korollar gilt dann

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^n} |f - f_k| \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\lim_{k\to\infty}} |f - f_k| \, d\lambda = 0.$$

Der Satz folgt wegen

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda - \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\lambda \Big| = \Big| \int_{\mathbb{R}^n} f - f_k \, d\lambda \Big| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f - f_k| \, d\lambda. \quad \square$$

Beispiel B1.8. Die Folge aus Beispiel B1.4 ist durch keine integrierbare Funktion dominiert, weil $\sup f_k = \sum \chi_{[0,1/k]}$. Das Integral davon ist unendlich, weil die harmonische Reihe divergiert.

Korollar B1.9. *Seien $A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n$ und sei $A := \bigcup A_k$. Ferner sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedes A_k integrierbar ist. Falls $\lim \int_{A_k} |f|\, d\lambda < \infty$, dann ist f über A integrierbar und es gilt*

$$\int_A f\, d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f\, d\lambda.$$

Beweis. (Aufgabe.) □

B2. Funktionenräume integrierbarer Funktionen

a. Der Raum L^1

Wir möchten jetzt einen Vektorraum $L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren, auf dem die Pseudonorm $\|\cdot\|_{L^1}$ eine Norm ist.

Definition B2.1. [Vgl. II.B1.6.] Sei V ein Vektorraum. Eine Funktion $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ heißt eine *Seminorm* (oder *Halbnorm*), falls für alle $v, w \in V$ und alle $c \in \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Homogenität: $\|cv\| = |c|\,\|v\|$,
- Dreiecksungleichung: $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$.

Bemerkung B2.2. Eine Seminorm ist genau dann eine Norm, wenn sie definit ist, d.h., wenn $\|v\| = 0$ nur für $v = 0$.

Lemma B2.3. *Sei $\|\cdot\|$ eine Seminorm auf V. Die Menge*

$$W := \{w \in V : \|w\| = 0\}$$

ist ein Unterraum. Auf dem Quotientenraum V/W ist $\|\cdot\|$ eine wohldefinierte Norm.

Beweis. (Aufgabe.) □

Definition B2.4. Sei

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) := \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f \text{ integrierbar}\}$$

der Raum aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen mit reellen Werten.

Satz B2.5. *Der Raum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ist ein Vektorraum. Die Abbildung $\int\colon \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ ist ein lineares Funktional. D.h., für $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f + cg)\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda + c \int_{\mathbb{R}^n} g\, d\lambda.$$

Für $f \le g$ gilt ferner $\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda \le \int_{\mathbb{R}^n} g\, d\lambda$.

Beweis. Seien (f_k) und (g_k) Folgen in $C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ und $g_k \to g$ in L^1. Aus der Homogenität und der Dreiecksungleichung für die Pseudonorm $\|\cdot\|_{L^1}$ folgt, dass

$$f_k + cg_k \;\to\; f + cg \quad \text{in } L^1.$$

Deswegen gehört $f + cg$ zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Die Rechenregeln folgen im Limes $k \to \infty$ aus denen für das Integral auf $C_c(\mathbb{R}^n)$. □

Bemerkung B2.6. Es ist deshalb wichtig, die Werten $\pm\infty$ auszuschliessen, weil wir sonst keinen Vektorraum hätten. Nach Korollar A8.12 ist das keine wesentliche Einschränkung, weil jede integrierbare Funktion f fast überall endlich ist, d.h., f ist äquivalent zu einem $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung B2.7. Weil wir schon im Allgemeinen die Dreiecksungleichung und Homogenität für $\|\cdot\|_{L^1}$ gezeigt haben, ist es klar, dass $\|\cdot\|_{L^1}$ eine Seminorm auf $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ist. Nach Satz A8.10 gilt $\|f\|_{L^1} = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast überall.

Definition B2.8. Sei $\mathcal{N} := \left\{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \|f\|_{L^1} = 0\right\}$ der Unterraum aller integrierbaren Funktionen, die fast überall Null sind. Wir definieren

$$L^1(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}$$

als Quotientenraum.

Bemerkung B2.9. Die Elemente von $L^1(\mathbb{R}^n)$ sind Äquivalenzklassen integrierbaren Funktionen bezüglich der Äquivalenzrelation „fast überall gleich“. Nach Lemma B2.3 ist $\|\cdot\|_{L^1}$ eine Norm auf $L^1(\mathbb{R}^n)$. Nach Lemma A8.13 ist das Integral ein lineares Funktional auf $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung B2.10. Ein Element in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist keine Funktion, sondern eine Äquivalenzklasse

$$[f] = \left\{g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) : \|f - g\|_{L^1} = 0\right\}.$$

Man darf nicht von dem Wert $[f](x)$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ reden: zu jedem $c \in \mathbb{R}$ gibt es $g \in [f]$ mit $g(x) = c$. Deshalb benutzt man oft eher $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Lemma B2.11. *Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gehören auch $|f|$, $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Dass $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, folgt aus Satz A7.20. Danach benutzen wir die Formeln

$$\max(f, g) = \tfrac{1}{2}(f + g + |f - g|),$$
$$\min(f, g) = \tfrac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$ □

Satz B2.12. *Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Ist eine der beiden Funktionen beschränkt, dann gilt $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Sei g beschränkt, $|g| \le M \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $h \in C_c(\mathbb{R}^n)$ so gibt, dass $\|h - fg\|_{L^1} < 2\varepsilon$. Nach Satz A7.17 gehört dann fg zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Wegen $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ existiert $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\varphi - f\|_{L^1} < {}^{\varepsilon}/_{M}$. Auch wenn f unbeschränkt ist, ist φ (als stetige Funktion mit kompaktem Träger) beschränkt:

$$|\varphi| \le N := \sup|\varphi| < \infty.$$

Wegen $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ existiert $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\psi - g\|_{L^1} < \varepsilon/N$. Nun sei $h := \varphi\psi$. Es gilt

$$\big|fg - h\big| = \big|(f-\varphi)g + \varphi(g-\psi)\big| \le M\big|f-\varphi\big| + N\big|g-\psi\big|$$

und deswegen

$$\|fg - h\|_{L^1} \le M\|f-\varphi\|_{L^1} + N\|g-\psi\|_{L^1} < \varepsilon + \varepsilon. \qquad \square$$

`Ende der Vorlesung 2009 Mai 28`

Satz B2.13. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ beschränkt und sei $p \ge 1$. Dann gilt $|f|^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Indem wir f durch $|f|/\sup|f|$ ersetzen, dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $0 \le f \le 1$. Sei $f_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ in L^1. Indem wir f_k durch die Funktion $\min(1, \max(0, f_k))$ ersetzen – die nicht weiter von f entfernt ist –, dürfen wir weiter annehmen, dass $0 \le f_k \le 1$.

Auf $[0,1]$ hat die Funktion $x \mapsto x^p$ nach dem Mittelwertsatz Lipschitzkonstante p; damit gilt punktweise

$$\big|f^p - f_k^p\big| \le p\big|f - f_k\big|.$$

Es folgt, dass $f_k^p \to f^p$ in L^1. $\square$

Definition B2.14. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *lokal integrierbar*, falls für jede kompakte Menge K die Funktion $\chi_K f$ integrierbar ist. Wir schreiben $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ für die Menge aller lokal integrierbaren Funktionen.

Bemerkung B2.15. Eine Funktion f ist genau dann lokal integrierbar, wenn jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ eine Umgebung U so besitzt, dass $\chi_U f$ integrierbar ist.

Satz B2.16. *Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und $\|f\|_{L^1} < +\infty$.*

Beweis. Jede integrierbare Funktion hat endliche L^1-Norm. Ausserdem ist sie nach Beispiel A8.32 über jede kompakte Teilmenge integrierbar, d.h. $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Umgekehrt, sei $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f\|_{L^1} < \infty$. Setzen wir $A_k := [-k,k]^n$, dann ist $\chi_{A_k} f$ integrierbar mit

$$\int_{A_k} |f|\,d\lambda \le \|f\|_{L^1} < \infty.$$

Nach Korollar B1.9 ist f über $\mathbb{R}^n = \bigcup A_k$ integrierbar. $\square$

b. *Die L^p-Räume*

Definition B2.17. Für $p \in [1, +\infty)$ definieren wir wie folgt die *L^p-Pseudonorm* auf $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$:

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int^* \big|f(x)\big|^p \, d\lambda(x)\right)^{1/p} \in [0, +\infty].$$

Definition B2.18. Für $p = +\infty$ definieren wir die *L^∞-Pseudonorm* mithilfe des *wesentlichen Supremums*:

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \big|f(x)\big| := \inf\Big\{a \in \mathbb{R} : \big|f(x)\big| \le a \text{ fast überall}\Big\}.$$

Bemerkung B2.19. Für $c > 0$ gilt $\|cf\|_{L^p} = c\|f\|_{L^p}$. Nach Satz A8.10 gilt $\|f\|_{L^p} = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast überall.

Definition B2.20. Für $p \in [1, +\infty]$ gibt es ein eindeutiges $q \in [1, +\infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$, nämlich $q = p/(p-1)$. Dann heißen p und q *konjugierte Hölder-Exponenten*.

Bemerkung B2.21. Der konjugierte Exponent q is eine monoton fallende Funktion von p. Für $p = 1$ gilt $q = +\infty$ und umgekehrt. Für $p = 2$ gilt $q = 2$.

Definition B2.22. [Vgl. I.F5.5.] Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f\colon J \to \mathbb{R}$ heißt *konkav*, falls es gilt

$$(1-t)f(x) + tf(y) \le f((1-t)x + ty)$$

für alle $x, y \in J$ und alle $t \in [0,1]$.

Lemma B2.23. [Vgl. I.F5.10.] *Eine zweimal differenzierbare Funktion f ist genau dann konkav, wenn $f'' \le 0$.* $\square$

Beispiel B2.24. Der Logarithmus ist wegen $\log''(x) = -1/x^2$ auf $(0, +\infty)$ konkav.

Lemma B2.25 (Young'sche Ungleichung). *Seien p, q konjugierte Hölder-Exponenten und seien $a, b \ge 0$. Dann gilt*

$$ab \le a^p/p + b^q/q.$$

Beweis. In der Definition einer konkaven Funktion setzen wir $f := \log$, $t := 1/q$, $x := a^p$, $y := b^q$. Es gilt $1 - t = 1/p$ und die Ungleichung heißt

$$1/p \log a^p + 1/q \log b^q \le \log(1/p\, a^p + 1/q\, b^q),$$

der Logarithmus der gewünschten Ungleichung. $\square$

Satz B2.26 (Hölder'sche Ungleichung). [Vgl. II.B1.11.] *Seien p und q konjugierte Hölder-Exponenten und seien $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q}.$$

(Falls in $f(x)g(x)$ oder auf der rechten Seite der Produkt $+\infty \cdot 0$ auftaucht, betrachten wir den als 0.)

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $f, g \ge 0$. Für $p = 1$, $q = +\infty$ ändern wir g auf einer Nullmenge, damit $\big|g(x)\big| \le \|g\|_{L^\infty}$ für alle x. Dann folgt die Hölder'sche Ungleichung direkt aus der Monotonie und der Linearität des Oberintegrals. (Der Fall $p = +\infty$ ist ähnlich.)

Jetzt seien $p, q \in (1, +\infty)$. Falls $\|f\|_{L^p} = 0$, gilt $f = 0$ fast überall (Bemerkung B2.19. Dann gilt auch $fg = 0$ fast überall, d.h. $\|fg\|_{L^1} = 0$. Ähnliches gilt im Falle $\|g\|_{L^q} = 0$. Mit der Annahme, dass diese Normen positiv sind, gibt es dann nichts zu zeigen, falls $\|f\|_{L^p} = +\infty$ oder $\|g\|_{L^q} = +\infty$.

Das heißt, wir dürfen annehmen, dass $\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \in (0, \infty)$. Indem wir f durch $\|f\|_{L^p}$ und g durch $\|g\|_{L^q}$ teilen, dürfen wir sogar annehmen, dass $\|f\|_{L^p} = 1 = \|g\|_{L^q}$.

Nach der Young'schen Ungleichung gilt punktweise

$$f(x)g(x) \le \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q}.$$

Weil das Oberintegral monoton und subadditiv ist, gilt damit

$$\|fg\|_{L^1} \le \frac{1}{p}\|f\|_{L^p}{}^p + \frac{1}{q}\|g\|_{L^q}{}^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \qquad \square$$

Ein Korollar ist die sogenannte Minkowski-Ungleichung, die Dreiecksungleichung für die L^p-Pseudonorm.

Korollar B2.27 (Minkowski-Ungleichung). [Vgl. II.B1.13.] *Sei $p \in [1, +\infty]$ und seien $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\|f + g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Beweis. Wir nehmen $\|f + g\|_{L^p} > 0$ an, weil es sonst nichts zu zeigen gibt. Sei $h := |f + g|^{p-1}$ und sei q der konjugierte Exponent. Es gilt dann $h^q = |f + g|^p$ und damit

$$\|h\|_{L^q} = \|f + g\|_{L^p}{}^{p/q}$$

Wegen

$$|f + g|^p = |f + g|h \le |fh| + |gh|$$

gilt nach der Monotonie und Subadditivität des Oberintegrals, dass

$$\|f + g\|_{L^p}{}^p \le \|fh\|_{L^1} + \|gh\|_{L^1}.$$

Nach der Hölder'schen Ungleichung ist aber

$$\|fh\|_{L^1} + \|gh\|_{L^1} \le (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})\,\|h\|_{L^q}.$$

Die Minkowski-Ungleichung folgt wegen $p - {}^p\!/_q = 1$. $\square$

`Ende der Vorlesung 2009 Juni 2`

Lemma B2.28. *Sei $0 \le f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Es gibt beschränkte Funktionen $0 \le f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit kompakten Trägern so, dass f_k monoton steigend gegen f konvergiert.*

Beweis. Mit $A_k := [-k, k]^n$ können wir $f_k := \chi_{A_k} \min(f, k)$ setzen. $\square$

Definition B2.29. Für $p \in [1, +\infty]$ sei

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{L^p} < \infty \right\}$$

der Raum aller *p-integrierbaren* Funktionen.

Satz B2.30. *Für jedes p ist $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ ein Vektorraum und $\|\cdot\|_{L^p}$ ist eine Seminorm auf $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Für $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ gehören auch $f_\pm$ zu $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. (Aufgabe.) $\square$

Satz B2.31. *Seien p und q konjugierte Hölder-Exponenten, sei $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ und sei $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$. Dann gehören $|f|^p$ und fg zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.*

Bemerkung B2.32. Die entsprechende Oberintegrale sind offensichtlich bzw. nach der Hölder'schen Ungleichung endlich. Die Schwierigkeit besteht darin, dass wir auch lokale Integrierbarkeit zeigen müssen.

Beweis. Weil wir sonst $f_\pm$ (und $g_\pm$) einzeln betrachten können, dürfen wir annehmen, dass $f, g \ge 0$. Seien (f_k) und (g_k) die monotonen Folgen aus Lemma B2.28. Weil diese beschränkt sind, gelten $f_k^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ aus Satz B2.13 und $f_k g_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ aus Satz B2.12.

Es gelten

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k^p \, d\lambda \le \|f\|_{L^p}{}^p, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_k g_k \, d\lambda \le \|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q},$$

wobei wir am Ende die Hölder'sche Ungleichung benutzen. Es konvergieren $f_k^p \to f^p$ und $f_k g_k \to fg$ monoton steigend. Die Aussage folgt nach dem Satz über monotone Konvergenz. $\square$

Lemma B2.33. *Für $1 \le p < q < r \le \infty$ gilt*

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n).$$

Falls $r = \infty$ gilt für $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$, dass

$$\|f\|_{L^q} \le \|f\|_{L^\infty}{}^{1-p/q}\,\|f\|_{L^p}{}^{p/q}.$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n)$; wir dürfen annehmen $f \ge 0$. Sei zunächst $r < \infty$. Wir setzen $g := \min(f, 1)$ und $h := f - g$. Es sind $g, h \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Wir behaupten, $\|g\|_{L^q}, \|h\|_{L^q} < \infty$. Damit gehören diese beide Funktionen und deshalb auch deren Summe f zu $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$.

Die Behauptung für g folgt wegen

$$0 \le g \le 1 \implies g^q \le g^p \le f^p \implies \|g\|_{L^q} \le \|f\|_{L^p}{}^{p/q}.$$

In einem Punkt x mit $f(x) \le 1$ gilt $h = 0$; in einem Punkt mit $f(x) \ge 1$ gilt $h^q \le f^q \le f^r$. Deswegen gilt $h^q \le f^r$ überall und die Behauptung für h folgt.

Für $r = +\infty$ gilt $f^q \le \|f\|_{L^\infty}{}^{q-p} f^p$ fast überall. $\square$

Lemma B2.34. *Sei $f \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger K. Für $1 \le p \le q$ gilt $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$\|f\|_{L^p} \le \|f\|_{L^q}\,\mathrm{vol}(K)^{(q-p)/(pq)}.$$

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $f \ge 0$. Sei $p' := {}^q\!/_p \ge 1$ und sei q' der zu p' konjugierte Exponent. Sei $g := f^p$ und sei $h := \chi_K$. Nach der Hölder'schen Ungleichung gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^p \, d\lambda = \|gh\|_{L^1} \le \|g\|_{L^{p'}}\|h\|_{L^{q'}} = \|f\|_{L^q}{}^p \,\mathrm{vol}(K)^{1/q'}. \qquad \square$$

Bemerkung B2.35. Sei $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Es gilt $\|f\|_{L^p} = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast überall.

Definition B2.36. Wir setzen wieder

$$\mathcal{N} := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f = 0 \text{ fast überall}\}.$$

Für $p \in [1, \infty]$ gilt $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$; wir definieren

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \,/\, \mathcal{N}$$

als Quotientenraum.

Bemerkung B2.37. Auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist $\|\cdot\|_{L^p}$ eine Norm. Die Elementen von $L^p(\mathbb{R}^n)$ sind Äquivalenzklassen von Funktionen, die fast überall gleich sind.

Definition B2.38. Eine Folge $f_k \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ *konvergiert in* L^p gegen $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, falls $\|f_k - f\|_{L^p} \to 0$.

Bemerkung B2.39. Weil die L^p-Seminorm auf $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ keine Norm ist, ist der „Grenzwert" hier nicht eindeutig: Falls $f_k \to f$ in L^p, dann konvergiert auch $f_k \to f + u$ für jedes $u \in \mathcal{N}$. Im Quotienten $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit der L^p-Norm ist diese Problem behoben: wie in jedem metrischen Raum ist der Grenzwert einer Folge eindeutig. Obwohl man die Begriffe „Cauchyfolge", „Dichtheit" usw. auf Vektorräume mit Seminorm passend erweitern könnte, werden wir jetzt die Räume $L^p(\mathbb{R}^n)$ anvisieren, auch wenn Äquivalenzklassen komplizierter als Funktionen sind.

Satz B2.40. *Für* $p \in [1, \infty)$ *ist* $C_c(\mathbb{R}^n)$ *dicht in* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung B2.41. Das heißt, zu jedem $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ und jedem $\varepsilon > 0$ müssen wir $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ finden mit $\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$.

Bemerkung B2.42. Der Satz gilt nicht für $p = \infty$. Als Beispiel können wir $g = \chi_{[0,1]} \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ nehmen. Für jede stetige Funktion f gilt $\|f - g\|_{L^\infty} \geq 1/2$. (Warum?)

`Ende der Vorlesung 2009 Juni 4`

Beweis. Sei $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ und sei $\varepsilon > 0$. Wir dürfen annehmen, dass $g \geq 0$. Sei (g_k) die monotone Folge aus Lemma B2.28. Wegen $(g - g_k)^p \leq g^p$ folgt $\|g - g_k\|_{L^p} \to 0$ aus dem Satz über dominierte Konvergenz. Das heißt, wir können k so wählen, dass $\|g - g_k\|_{L^p} < \varepsilon/2$. Wir setzen $M := \|g_k\|_{L^\infty} < \infty$.

Wir wählen $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - g_k\|_{L^1} < M(\varepsilon/2M)^p$. Wir dürfen annehmen, dass $0 \leq f \leq M$. Dann gilt $\left|f - g_k\right| \leq M$ und damit

$$\|f - g_k\|_{L^p}{}^p \leq M^{p-1}\|f - g_k\|_{L^1} \leq (\varepsilon/2)^p.$$

Nach der Minkowski-Ungleichung gilt

$$\|f - g\|_{L^p} \leq \|g - g_k\|_{L^p} + \|f - g_k\|_{L^p} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \qquad \square$$

Bemerkung B2.43. Schon der Unterraum aller C^∞-glatten Funktionen ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$, weil jede stetige Funktion sich beliebig gut (in L^p) durch glatte Funktionen approximieren lässt.

c. Die Vollständigkeit der L^p-Räume

Wir wollen zeigen, dass der normierte Vektorraum $L^p(\mathbb{R}^n)$ vollständig ist, d.h. ein Banachraum. Das erste Lemma dazu ist eine L^p-Version des Satzes über dominierte Konvergenz.

Bemerkung B2.44. Wir hätten die Ungleichung aus Lemma B2.34 besser für alle $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ mit kompkaten Trägern formulieren sollen.

Lemma B2.45. *Sei* $p \in [1, +\infty)$. *Sei* (f_k) *eine Folge in* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, *die fast überall gegen* $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ *konvergiert. Gibt es eine Funktion* $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\|g\|_{L^p} < \infty$, *die die Folge dominiert* ($|f_k| \leq g$), *dann ist* $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ *und es konvergiert* $f_k \to f$ *in* L^p.

Beweis. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Wegen $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ gilt $f_k\chi_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Es konvergiert $f_k\chi_K \to f\chi_K$ fast überall. Nach der obigen Bemerkung gilt $\left\|g\chi_K\right\|_{L^1} < \infty$. Nach dem Satz über dominierte Konvergenz gilt $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Nachdem wir f auf einer Nullmenge ändern gilt $|f| \leq g$ und damit $\|f\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^p} < \infty$. D.h., $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

Es konvergiert $|f_k - f|^p \to 0$ fast überall. Wegen

$$|f_k - f|^p \leq (|f_k| + |f|)^p \leq 2^p g^p$$

ist diese Funktionenfolge dominiert. Wenden wir den Satz über dominiert Konvergenz nochmal an, folgt es wie gewünscht, dass

$$\lim \int_{\mathbb{R}^n} \left|f_k(x) - f(x)\right|^p d\lambda(x) = 0. \qquad \square$$

Korollar B2.46. *Sei* $p \in [1, +\infty)$ *und seien* $f_k \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. *Falls die Reihe* $\sum \|f_k\|_{L^p} < \infty$ *konvergiert, dann konvergiert* $\sum f_k$ *fast überall – und in* L^p *– gegen eine Funktion* $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Sei $M := \sum \|f_k\|_{L^p} < \infty$. Seien $g_k := \sum_{i=0}^k |f_i|$ die Partialsummen der Reihe $g := \sum |f_i|$. Es gilt $g_k^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k^p \, d\lambda = \|g_k\|_{L^p}{}^p \leq \Big(\sum_{i=0}^k \|f_i\|_{L^p}\Big)^p \leq M^p$$

nach der Minkowski-Ungleichung. Wegen $g_k^p \uparrow g^p$ folgt aus dem Satz über monotone Konvergenz, dass $\|g^p\|_{L^1} < \infty$. Deshalb gilt $g < \infty$ ausserhalb einer Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$. Das heißt, für $x \notin N$ konvergiert die Reihe $f(x) := \sum f_k(x)$ absolut. (Für $x \in N$ setzen wir $f(x) := 0$.) Die Folge der Partialsummen zu $\sum f_k$ ist durch g dominiert. Die Behauptung folgt aus dem Lemma. $\square$

Satz B2.47. *Sei* $p \in [1, +\infty]$. *Sei* $([f_k])$ *eine Cauchyfolge in* $L^p(\mathbb{R}^n)$. *(Hier gilt* $f_k \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$.*) Dann gibt es eine Teilfolge, die fast überall gegen eine Funktion* $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ *konvergiert. In* L^p *konvergiert* $f_k \to f$.

Beweis. Den Fall $p = \infty$ lassen wir als Aufgabe; sei also $p < \infty$. Für $i \in \mathbb{N}$ gibt es k_i so, dass für $m, m' \geq k_i$ gilt $\|f_m - f_{m'}\|_{L^p} < 2^{-i}$. Wir dürfen annehmen $k_{i+1} > k_i$. Insbesondere gilt

$$\left\|f_{k_i} - f_{k_{i+1}}\right\|_{L^p} < 2^{-i}.$$

Deswegen können wir das obige Korollar auf die Reihe $\sum(f_{k_{i+1}} - f_{k_i})$ anwenden. Sei $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ die Reihensumme; nach dem Korollar konvergiert $f_{k_i} \to f$ sowohl in L^p als auch fast überall. Aus der Cauchybedingung folgt, dass $f_k \to f$ in L^p. $\square$

Bemerkung B2.48. Konvergenz in L^∞ könnte man „gleichmäßige Konvergenz fast überall" nennen. Im Falle $p = \infty$ des obigen Satzes brauchen wir keine Teilfolge wählen.

Korollar B2.49. *Sei* $p \in [1, +\infty]$. *Der normierte Vektorraum* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *ist vollständig, d.h. ein Banachraum.* $\square$

Bemerkung B2.50. Die L^2-Norm kommt vom Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} fg \, d\lambda$. Das heißt, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ ist ein *Hilbertraum*, ein vollständiger Skalarproduktraum.

`Ende der Vorlesung 2009 Juni 9`

B3. Der Satz von Fubini

Satz B3.1 (Fubini). *Sei $f\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Für $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ sei f^y die Funktion*

$$f^y\colon (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Es gibt eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^m$ so, dass f^y integrierbar ist für jedes $y \notin N$. Wir definieren $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} F(y) &:= \int_{\mathbb{R}^n} f^y(x)\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)\, dx_1 \cdots dx_n. \end{aligned}$$

für $y \notin N$ und $F(y) := 0$ für $y \in N$. Dann ist F integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} F\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f\, d\lambda.$$

Bemerkung B3.2. Wir sollten nicht erwarten, dass f^y für jedes y integrierbar ist. Weil eine n-dimensionale Ebene eine Nullmenge im Raum $\mathbb{R}^{n+m}$ ist, können wir z.B. alle Werte von einem (oder sogar von abzählbar vielen) f^y beiliebig ändern, ohne die Integrierbarkeit von f zu beeinträchtigen. Aber es reicht natürlich schon aus, wenn F nur fast überall richtig definiert ist.

Beweis. Sei $M := \int f \in \mathbb{R}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nach der Definition von Integrierbarkeit $h \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^{n+m})$ mit $h \geq f$ und $\int h \leq \int f + \varepsilon$. Nach dem Satz A6.37 (Fubini für halbstetige Funktionen) gilt für die halbstetige Funktion $H(y) := \int_{\mathbb{R}^n} h^y(x)\, d\lambda(x)$, dass

$$\int_{\mathbb{R}^m} H\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} h\, d\lambda \in [M, M + \varepsilon).$$

Definieren wir $F^* \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ durch $F^*(y) := \int^* f^y\, d\lambda$, dann gilt $F^* \leq H$.

Jetzt wiederholen wir alles mit $-f$ anstelle von f. Es gibt $k \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^{n+m})$ mit $k \geq -f$ und $\int k \leq \int -f + \varepsilon$. Mit $K(y) := \int_{\mathbb{R}^n} k^y\, d\lambda$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} K\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} k\, d\lambda \in [-M, -M + \varepsilon).$$

Definieren wir $F_* \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ durch $F_*(y) := \int_* f^y\, d\lambda$, dann gilt $-K \leq F_* \leq F^* \leq H$.

Es gilt dann $M - \varepsilon \leq \int_* F_*\, d\lambda \leq \int^* F^*\, d\lambda \leq M + \varepsilon$. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, sind F_* und F^* dann integrierbar mit $\int F_* = M = \int F^*$. Das Integral der nichtnegativen Funktion $F^* - F_*$ ist damit Null, d.h. es gibt eine Nullmenge N so, dass $F_*(y) = F^*(y) \in \mathbb{R}$ für alle $y \notin N$. Damit ist f^y integrierbar für $y \notin N$ mit $F(y) = F^*(y)$. □

a. Faltung von Funktionen

Eine wichtige Anwendung des Satzes von Fubini ist die sogenannte Faltung von Funktionen. Zunächst brauchen wir ein Lemma in die andere Richtung.

Definition B3.3. Für $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei $f \otimes g$ die durch

$$(f \otimes g)(x, y) := f(x)g(y)$$

definierte Funktion $f \otimes g\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$.

Lemma B3.4. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$ und sei $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gehört $f \otimes g$ zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{m+n})$ und es gilt*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f \otimes g\, d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x)g(y)\, d\lambda(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, d\lambda(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, d\lambda(y). \end{aligned}$$

Bemerkung B3.5. Sobald wir zeigen, dass $f \otimes g$ integrierbar ist, können wir den Satz von Fubini anwenden, um die Formel für das Integral herzuleiten. Falls f und g stetig sind, ist auch $f \otimes g$ stetig und damit integrierbar. Falls f und g halbstetig und nichtnegativ sind, dann ist auch $f \otimes g$ halbstetig und damit integrierbar.

Beweis. Sei $M := \max(\|f\|_{L^1}, \|g\|_{L^1}) + 1 < \infty$ und sei $0 < \varepsilon < 1$ gegeben. Nach Satz A7.17 gibt es stetige Funktionen φ, ψ mit kompakten Trägern so, dass $\|f - \varphi\|_{L^1} < \varepsilon$ und $\|f - \psi\|_{L^1} < \varepsilon$. Wir behaupten, dass

$$\|f \otimes g - \varphi \otimes \psi\|_{L^1} < 2M\varepsilon.$$

Nach dem selben Satz ist dann $f \otimes g$ integrierbar. Die Formel für das Integral folgt aus dem Satz von Fubini.

Um die Behauptung zu beweisen, wählen wir $h \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^m)$ und $k \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ mit

$$|f - \varphi| < h, \quad \|h\|_{L^1} < \varepsilon, \qquad |g - \psi| < k, \quad \|k\|_{L^1} < \varepsilon.$$

Es gilt

$$\left|f \otimes g - \varphi \otimes \psi\right| = \left|(f - \varphi) \otimes g + \varphi \otimes (g - \psi)\right| \leq h \otimes |g| + |\varphi| \otimes k.$$

Weil $|\varphi| \geq 0$ und $k \geq 0$ halbstetig sind, ist $|\varphi| \otimes k$ auch halbstetig und deshalb integrierbar. Es folgt dann aus dem Satz von Fubini, dass

$$\left\||\varphi| \otimes k\right\|_{L^1} = \|\varphi\|_{L^1}\|k\|_{L^1} \leq M\varepsilon.$$

Wir können aber auch eine halbstetige Funktion $\tilde{k}$ wählen mit $|g| \leq \tilde{k}$ und $\left\|\tilde{k}\right\|_{L^1} \leq M$. Dann gilt

$$\left\|h \otimes |g|\right\|_{L^1} \leq \|h\|_{L^1}\left\|\tilde{k}\right\|_{L^1} \leq \varepsilon M.$$

Die Behauptung folgt aus der Dreiecksungleichung. □

Bemerkung B3.6. Später werden wir die Substitutionsregel im Allgemeinen beweisen. Der Fall einer affin-linearen Transformation $x \mapsto Ax + v$ (mit $A \in \mathsf{GL}(\mathbb{R}^n)$ und $v \in \mathbb{R}^n$) folgt aber direkt aus Beispiel A6.36: Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gehört auch $x \mapsto f(Ax + v)$ zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$|\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax + v)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda.$$

Definition B3.7. Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Die *Faltung* $f * g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ wird fast überall durch

$$(f * g)(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y - x)\, d\lambda(x)$$

definiert.

Bemerkung B3.8. Nach dem Lemma gilt $f \otimes g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^{2n})$. Nach der Bemerkung ist auch $(x, y) \mapsto f(x)g(y - x)$ integrierbar. Nach dem Satz von Fubini existiert dann das Integral

$$(f * g)(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y - x)\, d\lambda(x)$$

für alle y ausserhalb einer Nullmenge N. (Die Werte von $f * g$ auf N sind unwichtig; zur Bestimmtheit setzen wir $(f*g)(y) := 0$ für $y \in N$.) Weiter sagt der Satz, dass $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ integrierbar ist mit

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f * g\, d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x)g(y - x)\, d\lambda(x)\, d\lambda(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f \otimes g\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda \int_{\mathbb{R}^n} g\, d\lambda\end{aligned}$$

Bemerkung B3.9. Ähnlich kann man das Integral vom Betrag $|f * g|$ berechnen: wegen $|f * g| \le |f| * |g|$ gilt

$$\|f * g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Die Faltung $(f, g) \mapsto f * g$ ist eine bilineare Abbildung

$$L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n).$$

Die Faltung ist auch kommutativ: $g*f = f*g$ fast überall. Das sieht man leicht mit der Substitution $z := y - x$. Fast überall gilt

$$\begin{aligned}(g * f)(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(y - x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y - z)f(z)\, d\lambda(z)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y - z)\, d\lambda(z) = (f * g)(y).\end{aligned}$$

Ende der Vorlesung 2009 Juni 11

B4. Die Substitutionsregel

Definition B4.1. Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ sei $\mathcal{L}^1(A)$ der Raum aller integrierbaren Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$. Für $f \in \mathcal{L}^1(A)$ sei $\|f\|_{L^1} := \int_A f\, d\lambda$.

Bemerkung B4.2. Per Definition ist f genau dann integrierbar, wenn die triviale Fortsetzung $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. Offensichtlich gilt $\|f\|_{L^1} = \|\overline{f}\|_{L^1}$. Der Raum $\mathcal{L}_1(A)$ ist auf natürliche Weise isomorph zum Unterraum

$$\{f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) : f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus A\}.$$

Lemma B4.3. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f \in \mathcal{L}^1(U)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $g \in C_c(U)$ mit $\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$.*

Beweis. Wegen $\overline{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gibt es ein $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\overline{f} - \varphi\|_{L^1} < \varepsilon/2$. Dann gilt auch

$$\|\overline{f} - \varphi\chi_U\|_{L^1} < \varepsilon/2.$$

Wegen $\chi_U \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ gibt es eine monotone Folge stetiger Funktionen $u_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $u_k \uparrow \chi_U$. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass $u_k \ge 0$ und $\operatorname{supp} u_k \subset U$. Wegen $|\varphi u_k| \le |\varphi|$ folgt aus dem Satz über dominierte Konvergenz, dass

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi\chi_U - \varphi u_k\|_{L^1} = 0.$$

D.h., wir können k so wählen, dass $\|\varphi\chi_U - \varphi u_k\|_{L^1} < \varepsilon/2$. Wir setzen $g := (\varphi u_k)|_U$; die Schranke $\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$ folgt aus der Dreiecksungleichung. ◻

Satz B4.4 (Substitutionsregel). *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn*

$$g := (f \circ \varphi)\ |\det D\varphi| : U \to \mathbb{R}$$

integrierbar ist. Dann gilt

$$\int_U g\, d\lambda = \int_U (f \circ \varphi)\ |\det D\varphi|\ d\lambda = \int_V f\, d\lambda.$$

Bemerkung B4.5. Sei $\psi : V \to U$ der inverse Diffeomorphismus. Dann gilt $(D\varphi) \circ \psi = (D\psi)^{-1}$ (vgl. IIE8.6). Es folgt, dass $f = (g \circ \psi)\ |\det D\psi|$. Dies bedeutet, dass es genügt, nur eine Richtung des Satzes zu beweisen, zum Beispiel $f \in \mathcal{L}^1(V) \implies g \in \mathcal{L}^1(U)$.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{L}^1(V)$. Nach dem Lemma gibt es eine Folge (f_k) in $C_c(V)$, die in L^1 gegen f konvergiert. Nach Satz B2.47 gibt es eine Teilfolge, die fast überall gegen f konvergiert. Wir ersetzen (f_k) durch diese Teilfolge und finden eine Nullmenge $N \subset V$ so, dass $f_k(x) \to f(x)$ für alle $x \in V \smallsetminus N$.

Nun sei $g_k := (f_k \circ \varphi)\ |\det D\varphi|$. Weil wir schon die Substitutionsregel für stetige Funktionen (Satz A5.21) kennen, gilt $\int_U g_k = \int_V f_k$ aber auch z.B. $\|g_k - g_j\|_{L^1} = \|f_k - f_j\|_{L^1}$. Damit ist (g_k) eine Cauchyfolge in $L^1(U)$.

Nach Satz A8.26 ist $M := \varphi^{-1}(N) \subset U$ eine Nullmenge. Offensichtlich gilt $g_k(y) \to g(y)$ für alle $y \in U \smallsetminus M$, d.h. fast überall. Nach Satz B2.47 gilt $g \in \mathcal{L}^1(U)$ mit $\|g_k - g\|_{L^1} \to 0$. Es folgt, dass

$$\int_U g\, d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_U g_k\, d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_V f_k\, d\lambda = \int_V f\, d\lambda. \qquad ◻$$

Bei Anwendung der Substitutionsregel ist es sehr angenehm, dass man Nullmengen nicht beachten muss.

Korollar B4.6 (Polarkoordinaten in der Ebene). *Sei $P := [0,\infty) \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$ und sei $\varphi\colon P \to \mathbb{R}^2$ die Polarkoordinatentransformation $\varphi(r, \theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn $rf \circ \varphi$ über P integrierbar ist und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Beweis. Seien $U := (0,\infty) \times (0, 2\pi) \subset P$ und $V := \mathbb{R}^2 \setminus ([0,\infty) \times \{0\})$. Dann ist $\varphi|_U\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus und es gilt $\det D\varphi = r$. Weil $P \setminus U$ und $\mathbb{R}^2 \setminus V$ Nullmengen sind, folgt die Behauptung aus der Substitutionsregel. □

B5. Messbare und nichtmessbare Mengen

Bemerkung B5.1. Das Lebesgue-Integral auf $\mathbb{R}$ ist viel allgemeiner als das Riemann-Integral. Viele Funktionen, die nicht Riemann-integrierbar sind (und gar nicht Regelfunktionen sind) sind integrierbar. Es gibt aber keine Theorie, die uns erlaubt, alle Funktionen zu integrieren.

Unser Zeil ist es jetzt, eine nichtintegrierbare Teilmenge $X \subset [0,1)$ zu finden. Eine Funktion kann einfach deswegen nichtintegrierbar sein, weil das Oberintegral unendlich ist. Aber hier ist es anders: die charakteristische Funktion χ_X ist beschränkt mit kompaktem Träger – es gilt $\int^* \chi_X \, d\lambda \le 1$ – aber sie ist nicht integrierbar.

Zunächst führen wir Carathéodorys Begriff der Messbarkeit ein, der uns erlaubt auch für Teilmengen unendlicher Volumina zu entscheiden, ob sie „wild“ sind oder nicht.

Bemerkung B5.2. Seien $A, E \subset \mathbb{R}^n$. Das äußere Lebesgue-Maß λ^* ist subadditiv. Wegen $A = (A \cap E) \cup (A \setminus E)$ heißt das, dass

$$\lambda^*(A) \le \lambda^*(A \cup E) + \lambda^*(A \setminus E).$$

Definition B5.3. Eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ heißt *messbar*, falls für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \setminus E).$$

Bemerkungen B5.4.

- Eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann messbar, wenn $\mathbb{R}^n \setminus E$ messbar ist.
- Um die Messbarkeit von E zu zeigen, reicht es aus, Teilmengen A mit $\lambda^*(A) < \infty$ zu betrachten.
- Jede Nullmenge ist messbar. Zum Beispiel sind $\varnothing$ und $\mathbb{R}^n$ messbar.

Lemma B5.5. *Eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann messbar, wenn für jede integrierbare offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ gilt, dass $U \cap E$ integrierbar ist.*

Beweis. Sei E nicht messbar. Per Definition gibt es A mit $\lambda^*(A) < \lambda^*(A \cup E) + \lambda^*(A \setminus E)$. Nach Satz A8.15 gibt es ein offenes $U \supset A$ mit

$$\lambda(U) < \lambda^*(A \cup E) + \lambda^*(A \setminus E) \le \lambda^*(U \cup E) + \lambda^*(U \setminus E).$$

Insbesondere ist $\lambda(U) < \infty$, d.h., U ist integrierbar. Wäre $U \cup E$ integrierbar, dann wäre nach Satz A8.30 auch $U \setminus E$ integrierbar und es gälte $\lambda(U) = \lambda^*(U \cup E) + \lambda^*(U \setminus E)$: Widerspruch!

Umgekehrt, sei $U \cap E$ nicht integrierbar. Dann gilt

$$\int_* \chi_{(U\cap E)}\, d\lambda < \int^* \chi_{(U\cap E)}\, d\lambda \le \lambda(U) < \infty.$$

Wegen $\int_* \chi_{(U\cap E)}\, d\lambda = \lambda(U) - \lambda^*(U \setminus E)$ gilt dann

$$\lambda(U) < \lambda^*(U \cup E) + \lambda^*(U \setminus E).$$

D.h., U ist das Zeugnis dafür, dass E nicht messbar ist. □

Korollar B5.6. *Eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann integrierbar, wenn E messbar ist und $\lambda^*(E) < \infty$.*

Beweis. Ist $\lambda^*(E) < \infty$ dann gibt es nach Satz A8.15 ein integrerbares offenes $U \supset E$. Ist E messbar, dann ist nach dem Lemma $E = U \cap E$ integrierbar.

Umgekehrt, sei E integrierbar. Wir wissen, dass $\lambda^*(E) < \infty$. Für jedes integrierbare U ist nach Satz A8.30 auch $U \cap E$ integrierbar. D.h., nach dem Lemma ist E messbar. □

`Ende der Vorlesung 2009 Juni 16`

Bemerkung B5.7. Jetzt kommen wir dazu, die nichtmessbare Teilmenge $X \subset [0,1)$ zu finden. Die Grundidee ist, die Menge X so zu wählen, dass $[0,1)$ die Vereinigung abzählbar vieler disjunkter Kopien von X ist. Wäre X integrierbar, dann wäre $1 = \lambda[0,1) = \sum_0^\infty \lambda(X)$. Die rechte Seite ist aber entweder 0 oder $+\infty$.

Definition B5.8. Sei $A := [0,1)$. Für $a, b \in A$ schreiben wir $a \boxplus b \in A$ für die Summe modulo 1:

$$a \boxplus b := (a+b) \mod 1 = \begin{cases} a+b, & a+b < 1, \\ a+b-1, & a+b \ge 1. \end{cases}$$

Für $a \in A$ und $B \subset A$ sei

$$\begin{aligned} a \boxplus B &:= \{a \boxplus b : b \in B\} \\ &= ((a+B) \cap A) \cup ((a-1+B) \cap A) \\ &= ((a+B) \cap A) \cup \big(-1 + ((a+B) \cap (1+A))\big) \end{aligned}$$

die Translation (modulo 1) von B durch a.

Lemma B5.9. *Das äußeere Maß ist invariant auch bezüglich dieser Translation. Das heißt, für $a \in A$ und $B \subset A$ gilt*

$$\lambda^*(a \boxplus B) = \lambda^*(B).$$

Beweis. Es gilt $\lambda^*(a+B) = \lambda^*(B)$. Weil A messbar ist (und wegen $a+B \subset A \cup (1+A)$) gilt

$$\lambda^*(a+B) = \lambda^*((a+B)\cap A) + \lambda^*((a+B)\cap(1+A)).$$

Nach zweiter Anwendung der Translationsinvarianz (mit der Messbarkeit von $[a,1)$) folgt die Behauptung. □

Definition B5.10. Auf A definieren wir durch

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

eine Äquivalenzrelation. Für jede Äquivalenzklasse

$$[x] = \{y \in A : x \sim y\} = (x+\mathbb{Q}) \cap A = x \boxplus (A \cap \mathbb{Q})$$

wählen wir einen Vertreter $x \in A$. Sei $X \subset A$ die Menge aller ausgewählten Vertreter.

Bemerkung B5.11. Um die (überabzählbar vielen) Vertreter zu wählen gibt es keinen expliziten Algorithmus. Wir müssen uns auf das (manchmal umstrittene) *Auswahlaxiom* der Mengenlehre berufen, um zu wissen, dass eine Wahl möglich ist. Man kann zeigen: ohne das Auswahlaxiom geht es nicht, eine nichtmessbare Menge zu konstriuieren.

Definition B5.12. Wir brauchen auch Subtraktion modulo 1: für $a, b \in A$ sei $a \boxminus b \in A$ mit $a \boxminus b = a - b$ oder $a \boxminus b = a - b + 1$.

Lemma B5.13. *Es gilt*

$$A = \bigcup_{p \in A\cap\mathbb{Q}} p \boxplus X.$$

Beweis. Für jedes $a \in A$ gibt es einen Vertreter $x \in X$ der Äquivalenzklasse $[a]$. D.h., $a - x \in \mathbb{Q}$. Wir setzen $p := a \boxminus x$, sodass $p \in A \cap \mathbb{Q}$ und $a = p \boxplus x$. Insbesondere ist $a \in p \boxplus X$. □

Lemma B5.14. *Für $p \neq q \in A \cap \mathbb{Q}$ sind $p \boxplus X$ und $q \boxplus X$ disjunkt.*

Beweis. Gehört a zu $(p \boxplus X) \cap (q \boxplus X)$ dann gehören $a \boxminus p$ und $a \boxminus q$ zu X. Wegen $p - q \in \mathbb{Q}$ gilt $a \boxminus p \sim a \boxminus q$. Aber X beinhaltet nur einen Vertreter dieser Äquivalenzklasse. □

Satz B5.15. *Die Menge X ist nicht messbar.*

Beweis. Wir nehmen an, dass X messbar ist, und finden einen Widerspruch. Wegen $\lambda^*(X) \le 1$ ist X dann integrierbar. Wir setzen $M := \lambda(X)$. Für jedes $a \in A$ ist $a \boxplus X$ nach Lemma B5.9 integrierbar mit $\lambda(a \boxplus X) = M$. Mit den letzten beiden Lemmata haben wir A als abzählbare disjunkte Vereinigung solcher Teilmengen geschrieben:

$$A = \bigcup_{p \in A\cap\mathbb{Q}} p \boxplus X.$$

Es folgt, dass

$$1 = \lambda(A) = \sum_0^\infty M.$$

Diese Summe ist allerdings entweder 0 (im Falle $M = 0$) oder ∞ (im Falle $M > 0$). Widerspruch! □

Bemerkung B5.16 *(Banach-Tarski-Paradoxon).* Man kann noch erstaunlichere Dinge mithilfe nichtmessbarer Mengen beweisen. Sei $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ der drei-dimensionale Einheitsball. Man kann B in fünf Teilen schneiden und diese Teile dann zu zwei gleichen Bällen $B \cup (B+v)$ wieder zusammenfügen. (Die Teile müssen natürlich nichtmessbare Mengen X_k sein.)

Genauer gesagt, $B = \bigcup_1^5 X_k$ ist die disjunkte Vereinigung fünfer Teilmengen. Es gibt aber fünf euklidische Bewegungen φ_k so, dass $\varphi_k(X_k)$ disjunkt sind und deren Vereinigung $\bigcup \varphi_k(X_k) = B \cup (B+v)$ zwei gleiche Bälle ist. (Hier heißt eine euklidische Bewegung eine affin-lineare Transformation $\varphi(x) = Ax + b$ mit $A \in O(n)$ orthogonal. Das (äußere) Lebesgue-Maß ist natürlich invariant unter φ.)

B6. Parameterabhängige Integrale

Am Anfang des Semesters (im Satz A3.2) haben wir das Integral einer stetigen Funktion betrachtet, die stetig von einem Parameter abhängt. Die Konvergenzsätze für das Lebesgue-Integral erlauben uns jetzt, diesen Satz weitgehend zu verstärken und auch die Differenzierbarkeit von solchen Parameterintegralen zu untersuchen.

Definition B6.1. Sei Y ein metrischer Raum. Sei $f : \mathbb{R}^n \times Y \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $y \in Y$ sei f^y die Funktion $x \mapsto f(x,y)$. Falls f^y integrierbar ist für alle $y \in Y$, dann nennen wir f ein *Parameterintegrand* und definieren das *Parameterintegral* $F : Y \to \mathbb{R}$ durch $F(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f^y \, d\lambda$.

Satz B6.2. *Sei $f : \mathbb{R}^n \times Y \to \mathbb{R}$ ein Parameterintegrand und sei $p \in Y$. Falls (a) es ein $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gibt mit $|f^y| \le g$ für alle $y \in Y$ und falls (b) für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ stetig in p ist, dann ist das Parameterintegral F auch in p stetig.*

Bemerkung B6.3. Wir können die Aussage so formulieren:

$$\lim_{y\to p} \int_{\mathbb{R}^n} f^y(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{y \to p} f^y(x)\, d\lambda(x).$$

Das heißt, wir dürfen Integral und Limes tauschen.

Beweis. Sei y_k eine Folge, die gegen p konvergiert. Wegen (b) konvergiert dann f^{y_k} punktweise (d.h. für jedes $x \in \mathbb{R}^n$) gegen f^p. Wegen (a) ist diese Folge durch $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ dominiert. Nach dem Satz über dominierte Konvergenz gilt deshalb

$$F(p) = \int_{\mathbb{R}^n} f^p \, d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f^{y_k}\, d\lambda = \lim_{k\to\infty} F(y^k). \qquad \square$$

Bemerkung B6.4. Dieser Satz ist einfach eine Formulierung des Satzes über dominierte Konvergenz, wo wir den Folgenlimes durch einen allgemeinen Limes $y \to p$ im metrischen Raum Y ersetzt haben.

Satz B6.5. *Sei $Y = J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : \mathbb{R}^n \times J \to \mathbb{R}$ ein Parameterintegrand. Falls für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $t \mapsto f(x,t)$ differenzierbar auf J ist, setzen wir*

$$h^t(x) := h(x,t) := \frac{df}{dt}(x,t) \quad \textit{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times J$$

Falls es ein $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gibt mit $|h^t| \le g$ für alle $t \in J$, dann ist F auf J differenzierbar. Außerdem ist h^t integrierbar für jedes $t \in J$ und es gilt $F'(t) := \int_{\mathbb{R}^n} h^t \, d\lambda$.

Bemerkung B6.6. Wir können die Aussage so formulieren:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d}{dt} f(x,t)\, d\lambda(x).$$

Das heißt, wir dürfen Integral und Ableitung tauschen.

Beweis. Sei $p \in J$ und sei (t_k) eine Folge, die gegen p konvergiert. Für die Funktionen

$$f_k := \frac{f^{t_k} - f^p}{t_k - p} \qquad \text{gilt} \qquad \lim_{k\to\infty} f_k = h^p$$

punktweise. Nach dem Mittelwertsatz gibt es zu jedem k und jedem $x \in \mathbb{R}^n$ ein $u = u(k,x) \in J$ (zwischen t_k und p) mit $f_k(x) = h^u(x)$. Deswegen gilt $|f_k| \le g$. Nun folgt aus dem Satz über dominierte Konvergenz, dass

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F(t_k) - F(p)}{t_k - p} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h^p \, d\lambda.$$

Weil dies für jede Folge t_k gilt, ist die linke Seite $F'(p)$. □

`Ende der Vorlesung 2009 Juni 18`

B7. Lebesgue-Dichte

Bisher haben wir mehrere schöne Konvergenzsätze für das Lebesgue-Integral beweisen können, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung hingegen gar nicht erwähnt. Weil die Lebesgue-Theorie keine Nullmengen beachtet, muss man bei dem Hauptsatz ein bisschen vorsichtig sein.

Bemerkung B7.1. Sei $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ lokal integrierbar. Dann existiert $\int_a^x f\, d\lambda$ für alle $a, x \in \mathbb{R}$. Für festes $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $F\colon x \mapsto \int_a^x f\, d\lambda$ ein *unbestimmtes Integral* von f.

Beispiele B7.2.

- Sei $f = \chi_N$ die charakteristische Funktion einer Nullmenge $N \subset \mathbb{R}$. Dann ist $F \equiv 0$ das unbestimmte Integral. Diese Funktion ist differenzierbar und es gilt $F' = f$ fast überall, nicht aber für $x \in N$.
- Sei F ein unbestimmtes Integral für $f = \chi_{[0,1]}$. Dann ist F stückweise linear und fast überall differenzierbar (nämlich für $x \notin \{0,1\}$). In jedem Punkt der Differenzierbarkeit gilt $F' = f$.
- Sei F die stetige Cantorfunktion aus I.G2.12. Die Ableitung existiert (und es gilt $F' = 0$) in jedem Punkt ausserhalb der Cantormenge, d.h. fast überall. Diese fast überall definierte Ableitung ist natürlich integrierbar ($F' = 0 \in L^1(\mathbb{R})$). Die Cantorfunktion F ist aber offensichtlich kein unbestimmtes Integral von F'.

Um die richtigen Aussagen zu formulieren, müssen wir ein bisschen vorbereiten.

Definition B7.3. Sei $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, integrierbare Teilmenge mit $\lambda(B) < \infty$. Der *Mittelwert* von f über B ist

$$⨍_B f\, d\lambda := \frac{\int_B f\, d\lambda}{\int_B 1\, d\lambda} = \frac{\int_B f\, d\lambda}{\lambda(B)}.$$

Für $p \in \mathbb{R}^n$ ist die *(Lebesgue-)Dichte* von f in p der Limes

$$\Theta_p(f) := \lim_{r\to 0} ⨍_{B_r(p)} f\, d\lambda$$

(falls dieser existiert). Insbesondere für eine messbare Menge A und $f := \chi_A$ heißt

$$\Theta_p(A) := \Theta_p(\chi_A) = \lim_{r\to 0} \frac{\lambda(A \cap B_r(p))}{\lambda(B_r(p))}$$

die *Dichte* von A in p.

Beispiel B7.4. Sei $(0,1)^2 \subset A \subset [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, d.h., A besteht aus dem Inneren des Einheitsquadrats zuzüglich einer beliebigen Teilmenge des Randes. Dann existiert $\Theta_p(A)$ in jedem Punkt p. Diese Dichte ist 1 im Inneren, $1/2$ am Rand, $1/4$ in den vier Ecken und 0 ausserhalb von $[0,1]^2$.

Definition B7.5. Ein Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ heißt *Lebesguepunkt* von A, falls $\Theta_p(A) = \chi_A(p)$.

Definition B7.6. Ein Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ heißt *Lebesguepunkt* von $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, falls

$$\Theta_p\big(|f - f(p)|\big) = 0.$$

Bemerkung B7.7. Es folgt, dass für einen Lebesguepunkt gilt $\Theta_p(f) = f(p)$. Die beiden Aussagen sind im Falle $f = \chi_A$ äquivalent.

Bemerkung B7.8. Im letzten Beispiel haben wir gesehen, fast jeder Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ ist ein Lebesguepunkt von A. Allgemeiner werden wir zeigen, dass für jedes $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fast jeder Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ ein Lebesguepunkt von f ist.

Definition B7.9. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und sei $p \in \mathbb{R}^n$. Wir sagen, $y \in \mathbb{R}$ ist der *approximative Limes* von f in p,

$$y = \operatorname*{lim\,ap}_{x\to p} f(x),$$

falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $\{x : |f(x) - y| < \varepsilon\}$ Dichte 1 in p hat. Wir sagen, f ist *approximativ stetig* in p, falls $f(p) = \operatorname{lim\,ap}_{x\to p} f(x)$.

Beispiel B7.10. Sei $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ durch $f(x,y) = |x|^{|y|}$ definiert. Wegen $f(x,0) = |x|^0 = 1$ und $f(0,y) = 0^{|y|} = 0$ hat f im Ursprung $(0,0)$ keinen Limes. Es stellt sich die Frage, was sollte 0^0 heißen? Wir behaupten (Beweis als Aufgabe), dass

$$\operatorname*{lim\,ap}_{(x,y)\to(0,0)} |x|^{|y|} = 1,$$

d.h., dass oft $0^0 = 1$ die sinnvollste Definition ist.

Beispiel B7.11. Sei $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x^2\}$ und sei $p = (0,0)$ der Ursprung. Dann ist p Lebesguepunkt von A. Die charakteristiche Funktion χ_A ist in p approximativ stetig (obwohl unstetig).

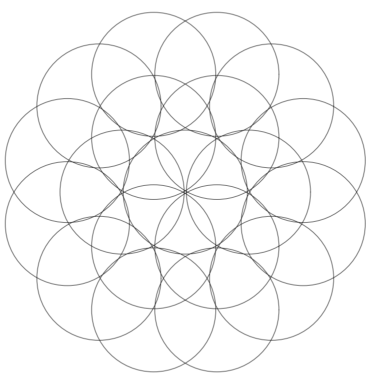
Bemerkung B7.12. Ist p ein Lebesguepunkt von f, dann ist f in p approximativ stetig. (Aufgabe.) Hingegen ist nicht jeder Punkt der approximativen Stetigkeit ein Lebesguepunkt.

a. Der Überdeckungssatz von Besicovitch

Wir betrachten hier Überdeckungen durch abgeschlossene Bälle $\overline{B}_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ (mit $r > 0$).

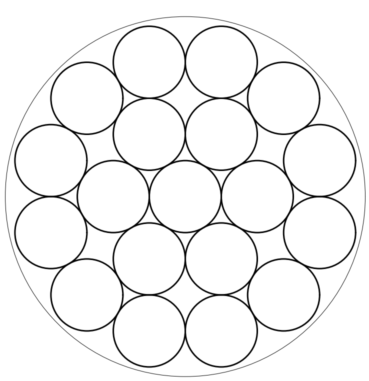
Definition B7.13. Eine Familie C abgeschlossener Bälle heißt *kontrolliert*, falls folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. ein gibt einen *mittleren* Ball $\overline{B}_r(x) \in C$, der alle Bälle aus C trifft und dessen Radius r kleiner oder gleich alle Radien ist.
2. Der Mittelpunkt x von jedem Ball $\overline{B}_r(x) \in C$ liegt ausserhalb oder am Rand jedes anderen Balls aus C.



Es ist intuitiv klar, dass die Anzahl der Bälle in einer kontrollierte Familie im $\mathbb{R}^n$ begrenzt ist.

Definition B7.14. Sei β_n die Anzahl der Einheitsbälle, welche in den Ball $B_5(0)$ gepackt werden können (d.h. mit disjunkten Inneren), wobei $B_1(0)$ unter den Einheitsbällen ist.



Bemerkung B7.15. Wenn man die Radien in einer solchen Kugelpackung verdoppelt, erhält man eine kontrollierte Familie. Umgekehrt sei eine kontrollierte Familie gegeben, in denen alle Radien gleich sind; man erhält eine solche Kugelpackung, indem man die Radien halbiert.

Bemerkung B7.16. Kugelpackungen sind mathematisch gut untersucht; bessere Schranken als die triviale $\beta_n \leq 5^n$ sind bekannt. Es gilt z.B. $\beta_2 = 19$ und $67 \leq \beta_3 \leq 87$. Der Wachstumsrate von β_n liegt zwischen 2^n und e^n.

Lemma B7.17. *Eine kontrollierte Familie im $\mathbb{R}^n$ besteht aus höchstens β_n Bälle.*[1]

Beweis. Nach der obigen Bemerkung bleibt nur zu zeigen, dass jede kontrollierte Familie durch eine gleich große ersetz werden kann, in der alle Radien gleich sind.

Sei C eine kontrollierte Familie. Nach einer euklidischen Ähnlichkeitstransformation dürfen wir annehmen, der mittlere Ball ist der Einheitsball $\overline{B}_1(0)$. Jetzt ersetzen wir jeden Ball $\overline{B}_r(x) \in C$ mit einem in $\overline{B}_r(x)$ enthaltenen Einheitsball, nämlich $\overline{B}_1(x)$ (falls $|x| \leq 2$) oder $\overline{B}_1({}^{2x}/_{|x|})$ (falls $|x| \geq 2$).

Wir müssen zeigen, diese neue Familie ist wieder kontrolliert. Es ist klar, dass jeder neue Ball immer noch den mittleren $\overline{B}_1(0)$ trifft. Weil die neuen Bälle Teilmengen der alten sind, liegen die unbewegten Mittelpunkte immer noch ausserhalb aller anderen Bälle. Weil die neuen Bälle alle den gleichen Radius haben, ist die Relation „Mittelpunkt von B' liegt ausserhalb von B“ symmetrisch in B und B'. Das heißt, wir müssen nur noch den Fall betrachten, dass beide Mittelpunkte bewegt wurden. Hier folgt die Aussage aus einer trigonometrischen Berechnung. (Aufgabe.) □

```
Ende der Vorlesung 2009 Juni 23
```

Definition B7.18. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und sei C eine Familie abgeschlossner Bälle mit beschränkten Radien. Falls für jedes $a \in A$ es einen Ball in C mit Mittelpunkt a gibt, nennen wir C eine *zentrierte Überdeckung* von A. (Das heißt, A ist die Menge der Mittelpunkte der Bälle aus C.)

Satz B7.19 (Überdeckungssatz von Besicovitch). *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und sei C eine zentrierte Überdeckung von A. Dann gibt es (jeweils abzählbare) Unterfamilien $C_i \subset C$ (für $i = 1, \ldots, \beta_n$) mit folgenden Eigenschaften: Die Bälle in jedem C_i sind disjunkt und die Unterfamilien zusammen überdecken A, d.h.,*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\beta_n} \bigcup C_i = \bigcup_{i=1}^{\beta_n} \bigcup_{B \in C_i} B.$$

Beweisidee. Die Idee ist, die Unterfamilien rekursiv zu definieren. In jedem Schritt nehmen wir einen größten Ball B aus C und behaupten, dass es (mindestens) ein C_i gibt, dessen Vereinigung B nicht trifft. Wir fügen B zu diesem C_i hinzu und entfernen aus C alle Bälle, deren Mittelpunkte in B liegen.

---

[1] Siehe: „Sphere Packings Give an Explicit Bound for the Besicovitch Covering Theorem“, J. M. Sullivan, *J. Geom. Anal.* **4**:2 (1994) 219-231.

Um die Behhauptung zu beweisen, nehmen wir an, dass kein C_i verfügbar ist. Dann gibt es zu jedem i einen Ball $B_i \in C_i$, welcher B trifft. Wir erhalten einen Widerspruch zum Lemma, indem wir zeigen, die Menge $\{B, B_1, \ldots, B_{\beta_n}\}$ ist dann eine kontrollierte Familie mit mittlerem Ball B. Für je zwei Bälle B_i und B_j wurde einer (sagen wir B_i) früher ausgewählt. Deswegen liegt der Mittelpunkt von B_j nicht in B_i und B_i hat den grösseren Radius. Es folgt, dass der Mittelpunkt von B_i auch nicht in B_j liegt.

Um diesen Beweis vollständig zu machen, muss man zwei technischen Details klären. Erstens, weil C normalerweise überabzählbar ist, benutzt man nicht die gewöhnliche „vollständige Induktion" über $\mathbb{N}$, sondern die sogenannte „transfinite Induktion" über größere Ordinalzahlen. Zweitens, weil der supremale Radius vielleicht nicht angenommen wird, muss man erlauben, dass in jedem Schritt ein „fast größter" Ball B ausgewählt wird. Dann muss man aber mit Familien umgehen, die nur „bis auf einem Faktor $(1+\varepsilon)$ kontrolliert" sind. □

Bemerkung B7.20. Die Vereinigung der Familien C_i ist eine Überdeckung von A mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt höchstens β_n-mal überdeckt wird.

Als Korollar erhalten wir eine Variante des Überdeckungssatzes von Vitali:

Korollar B7.21. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar und sei C eine zentrierte Überdeckung von A. Falls für jedes $a \in A$ es Bälle $B \in C$ mit Mittelpunkt a und beliebig kleinem Radius gibt, dann existiert eine abzählbare Unterfamilie $\mathcal{D} \subset C$ disjunkter Bälle so, dass $A \setminus \bigcup \mathcal{D}$ eine Nullmenge ist.*

Beweisskizze. Sei $1 > \rho > 1 - 1/\beta_n$. Wir wenden den Satz an. Eine der Unterfamilien überdeckt mindestens Anteil $1/\beta_n$ des Volumen von A. Deswegen gibt es davon eine endliche Unterfamilie $\mathcal{D}_0$ disjunkter Bälle so, dass für $A_1 := A \setminus \bigcup \mathcal{D}_0$ gilt $\lambda(A_1) \le \rho\lambda(A)$. Nun sei $C_1 \subset C$ die Unterfamilie aller Bälle, die $\bigcup \mathcal{D}_0$ nicht treffen. Dann erfüllen A_1 und C_1 die Voraussetzungen des Korollars. Wir wiederholen die obigen Schritten und erhalten eine endliche Familie $\mathcal{D}_1$ disjunkter Bälle so, dass für $A_2 := A_1 \setminus \bigcup \mathcal{D}_1$ gilt $\lambda(A_2) \le \rho\lambda(A_1) \le \rho^2\lambda(A)$. Wir machen per Induktion weiter. Am Ende setzen wir $\mathcal{D} := \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{D}_i$. □

b. Lebesguepunkte

Jetzt wollen wir die versprochenen Aussagen über Lebesguepunkte beweisen. Dazu brauchen wir auch die *untere Dichte*

$$\Theta_{*,p}(A) := \varliminf_{r\to 0} \frac{\lambda(A \cap B_r(p))}{\lambda(B_r(p))}.$$

Lemma B7.22. *Sei $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\Theta_p(f) = f(p)$ fast überall.*

Beweis. Um der Einfachheit willen betrachten wir nur den Fall $f = \chi_A$. (Für den allgemeinen Fall benutzt man – wie im Korollar unten – die Tatsache, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt.)

Es reicht aus zu zeigen, dass $\Theta_{*,p}(A) = 1$ für fast alle $p \in A$. Falls nicht, können wir $\delta < 1$ so wählen, dass

$$A' := \{p \in A : \Theta_{*,p}(A) < \delta\}$$

keine Nullmenge ist. Für $p \in A'$ gilt dann

$$\Theta_{*,p}(A') \le \Theta_{*,p}(A) < \delta.$$

Nun können wir eine offene Menge $U \supset A'$ so finden, dass $\delta\lambda(U) < \underline{\lambda}(A')$. Sei nun C die Familie aller abgeschlossenen Bälle $B = \overline{B}_r(p) \subset U$ mit $p \in A'$ und

$$\lambda(A' \cap B) < \delta\lambda(B), \qquad \text{d.h.} \quad ⨍_B \chi_A \, d\lambda < \delta.$$

Zu jedem $p \in A'$ gibt es wegen $\Theta_{*,p}(A') < \delta$ beliebig kleine Bälle in C mit Mittelpunkt p. Nach dem Korollar gibt es eine abzählbare Unterfamilie $\mathcal{D}$ disjunkter Bälle, die fast alle Punkte $p \in A'$ überdeckt. Das heißt,

$$\lambda(A') = \sum_{B\in\mathcal{D}} \lambda(A' \cap B) < \delta \sum_{B\in\mathcal{D}} \lambda(B) \le \delta\lambda(U).$$

Widerspruch! □

Korollar B7.23. *Sei $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist fast jeder Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ ein Lebesguepunkt von f.*

Beweis. Für jedes $q \in \mathbb{Q}$ wenden wir das Lemma auf die Funktion $x \mapsto |f(x) - q|$ an. Es gilt $\Theta_p(|f - q|) = |f(p) - q|$ für alle p ausserhalb einer Nullmenge N_q. Weil $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ist die Vereinigung $N := \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} N_q$ wieder eine Nullmenge. Nun sei $p \in \mathbb{R}^n \setminus N$ und sei (q_i) eine Folge in $\mathbb{Q}$, die gegen $f(p)$ konvergiert. Es gilt (warum?)

$$\Theta_p\big(|f - f(p)|\big) = \lim \Theta_p\big(|f - q_i|\big) = \lim\big|f(p) - q_i\big| = 0,$$

d.h., p ist ein Lebesguepunkt von f. □

Bemerkung B7.24. Zum Schluss kommen wir zum Hauptsatz zurück. Sei F ein unbestimmtes Integral von $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1)$. Wir wissen, dass für fast jedes $p \in \mathbb{R}$ gilt $f(p) = \Theta_p(f)$, d.h.

$$f(p) = \lim_{h\to 0} ⨍_{p-h}^{p+h} f(x)\, dx = \lim_{h\to 0} \frac{F(p+h) - F(p-h)}{2h}.$$

Falls $F'(p)$ existiert, gilt deswegen $F'(p) = f(p)$. (Um die Existenz zu beweisen, müssten wir die ganzen obigen Sätze auch für asymmetrische Dichten $\Theta_p^{\pm}$ beweisen, was aber nicht schwieriger ist.)

Bemerkung B7.25. Aus unserem Zugang zum Hauptsatz weiß man nicht, wo die Nullmenge $N := \{p : F'(p) \ne f(p)\}$ liegt. Man kann aber zeigen, dass nur Punkte, in denen f unstetig ist, in N auftauchen können.

Bemerkung B7.26. Wir haben schon die stetige Cantorfunktion F im Beispiel B7.2 benutzt: F ist fast überall differenzierbar, aber wegen $F' = 0$ (fast überall) gilt $F \ne \int F'$. Der Begriff *absolut stetig* wurde erfunden um dieses Problem zu vermeiden. Falls eine Funktion F absolut stetig ist, dann ist F fast überall differenzierbar, die Ableitung F' ist integrierbar und es gilt $F(b) - F(a) = \int_a^b F'\, dx$.

Bemerkung B7.27. Man kann eine differenzierbare Funktion F finden, deren Ableitung F' zu viel oszilliert, um (Lebesgue-)integrierbar zu sein. Hier hilft das Gauge-Integral (vgl. II.A8.10). Man kann folgendes zeigen: Sei F eine stetige Funktion, die ausserhalb einer abzählbaren Menge differenzierbar ist. Dann ist F' Gauge-integrierbar und es gilt $F(b) - F(a) = \int_a^b F'\,dx$.

`Ende der Vorlesung 2009 Juni 25`
