C. INTEGRATION AUF MANNIGFALTIGKEITEN

Was ist das Integral einer Funktion über die Einheitssphäre oder eine andere Fläche im Raum $\mathbb{R}^3$? Im Sinne des Lebesgue-Integrals sind diese „unendlich dünnen“ Flächen Nullmenge. Hier wollen wir aber nicht einfach sagen, das drei-dimensionale Integral ist Null, sondern ein zwei-dimensionales Integral berechnen.

C1. Mannigfaltigkeiten

Wir wiederholen aus II.E9 die Definition einer Untermannigfaltigkeit und die wichtigsten Folgerungen aus dem Satz über implizite Funktionen.

Definition C1.1. [Vgl. II.E9.11.] Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *k-dimensionale (Unter)mannigfaltigkeit*, falls es zu jedem Punkt $p \in M$ folgendes gibt:

- eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von p,
- eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und
- einen Diffeomorphismus $\varphi\colon U \to V$ so, dass

$$\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \{x \in V : 0 = x_{k+1} = \cdots = x_n\}.$$

Eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt auch *Hyperfläche*.

Bemerkung C1.2. Man kann Mannigfaltigkeiten auch abstrakt definieren. Es stellt sich aber heraus, dass jede abstrakte k-dimensionale Mannigfaltigkeit auch als Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{2k}$ eingebettet werden kann. Wir betrachten nur Untermannigfaltigkeiten, die wir deswegen einfach Mannigfaltigkeiten nennen.

Bemerkung C1.3. Sei $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Falls φ und φ^{-1} beide α-mal stetig differenzierbar sind, dann heißt φ ein Diffeomorphismus der Klasse C^α. Man redet dann auch von Mannigfaltigkeiten der Klasse C^α. Die meisten Sätze unten gelten entsprechend, wenn alle Funktionen α-mal differenzierbar sind. Wir betrachten aber nur den Fall $\alpha = 1$.

Bemerkung C1.4. Wenn wir k-dimensionale Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$ betrachten, werden wir oft den Isomorphismus $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ benutzen, wobei wir $x \in \mathbb{R}^n$ als $x = (x', x'')$ schreiben mit $x' \in \mathbb{R}^k$ und $x'' \in \mathbb{R}^{n-k}$. (Diese Notation hat naturlich gar nichts mit Ableitungen zu tun!)

Beispiel C1.5. [Vgl. II.E9.12.] Der Graph $\{(x', x'') : x'' = g(x')\}$ einer stetig differenzierbaren Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ ($U \subset \mathbb{R}^k$ offen) ist eine Mannigfaltigkeit.

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass jede Mannigfaltigkeit lokal um jeden Punkt ein solcher Graph ist:

Lemma C1.6. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $x \in M$. Nach einer Umordnung der Koordinaten gibt es zu $x = (x', x'')$ Umbegebungen $x' \in U' \subset \mathbb{R}^k$ und $x'' \in U'' \subset \mathbb{R}^{n-k}$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U' \to U''$ so, dass*

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') : x'' = g(x')\}$$

der Graph von g ist.

Beweis. (Aufgabe.) □

Definition C1.7. [Vgl. II.E9.14.] Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Ein Punkt $y \in \mathbb{R}^m$ heißt *regulärer Wert* von f, falls $D_x f$ surjektiv ist für jeden $x \in U$ mit $f(x) = y$.

Satz C1.8. [Vgl. II.E9.17.] *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $h\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ so gibt, dass $M \cap U = h^{-1}(c)$, wobei $c \in \mathbb{R}^k$ ein regulärer Wert von h ist.* □

Korollar C1.9. [Vgl. II.E9.18.] *Ist c ein regulärer Wert von $h\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$, dann ist die Niveaumenge $h^{-1}(c) \subset U \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit.*

Beispiel C1.10. [Vgl. II.E9.19.] Die Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Hyperfläche.

Bemerkung C1.11. Diese „implizite“ Charakterisierung einer Mannigfaltigkeit ist sehr schön aber nicht direkt geeignet für Integration.

Definition C1.12. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ heißt *Immersion*, falls $D_x\varphi$ injektiv ist für jedes $x \in U$.

Satz C1.13. *Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und sei $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Dann hat jedes $p \in U$ eine Umbegung $V \subset U$ so, dass $W := \varphi(V)$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, und $\varphi|_V\colon V \to W$ ein Homöomorphismus ist.*

Beweis. Weil $D_p\varphi$ injektiv ist, nach Umordnung der Koordinaten in $\mathbb{R}^n$ können wir $\varphi = (\varphi', \varphi'')$ schreiben, wobei $D_p\varphi'\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ invertierbar ist. (Vgl. II.E9.16.) Nach dem Umkehrsatz II.E8.15 gibt es dann $V \subset U$ so, dass $\varphi'|_V : V \to \varphi'(V)$ ein Diffeomorphismus ist. Nun definieren wir einen Diffeomorphismus

$$\psi = (\psi', \psi'')\colon V \times \mathbb{R}^{n-k} \to \varphi'(V) \times \mathbb{R}^{n-k}$$

durch

$$\psi'(x', x'') := \varphi'(x'), \qquad \psi''(x', x'') := \varphi''(x') + x''.$$

Offensichtlich gilt $\psi(V \times \{0\}) = \varphi(V) = W$ und damit ist W per Definition eine Mannigfaltigkeit. Die Einschränkung des Homöomorphismus ψ auf die Teilmenge $V \times \{0\}$ ist ein Homöomorphismus, deswegen auch $\varphi\colon V \to W$. □

Korollar C1.14. *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $p \in M$ folgendes gibt: eine Umgebung $W \ni p$ (mit W offen in M), ein offenes $U \subset \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(U) = W$, wobei $\varphi\colon U \to W$ ein Homöomorphismus ist.*

Bemerkung C1.15. Diesen Homöomorphismus nennt man *Parametrisierung* für M.

Beispiel C1.16. Sei $M = \{(x', g(x'))\}$ der Graph der stetig differenzierbaren Funktion g. Dann ist M durch $x' \mapsto (x', g(x'))$ parametrisiert.

Beweis. Eine Richtung folgt aus dem Satz: weil wir hier verlangen, dass $\varphi\colon U \to W$ ein Homöomorphismus ist, ist das Bild der Immersion lokal eine Mannigfaltigkeit, d.h. eine Mannigfaltigkeit.

Die andere Richtung folgt aus Lemma C1.6 und dem letzten Beispiel: der Graph von g hat eine Parametrisierung. □

```
Ende der Vorlesung 2009 Juni 30
```

C2. Der Tangetenraum

Definition C2.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentenvektor zu M in p*, falls es eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Der Raum T_pM aller Tangentenvektoren heißt *Tangentenraum zu M in p*.

Satz C2.2. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Dann ist $T_pM \subset \mathbb{R}^n$ ein k-dimensionaler Untervektorraum. Insbesondere sei $\varphi\colon U \to M$ (U offen in $\mathbb{R}^k$) eine lokale Parametetrisierung für M mit $\varphi(x) = p$. Ferner sei $h\colon V \to \mathbb{R}^{n-k}$ ($V \ni p$ offen in $\mathbb{R}^n$) eine stetig differenzierbare Abbildung so, dass M lokal die Niveaumenge $h^{-1}(c)$ ist, wobei $c = h(p)$ ein regulärer Wert ist. Dann gilt*

$$D_x\varphi(\mathbb{R}^k) = T_pM = \ker D_ph.$$

Bemerkung C2.3. Es folgt, dass die partiellen Ableitungen $\partial_i\varphi(x)$ (für $i = 1, \dots, k$) eine Basis für T_pM darstellen.

Beweis. Weil φ eine Immersion ist, ist $D_x\varphi$ injektiv, d.h., $D_x\varphi(\mathbb{R}^k)$ hat Dimension k. Weil c ein regulärer Wert von h ist, ist D_ph surjektiv, d.h., $\ker D_ph$ hat Dimension k. Deswegen reicht es aus zu zeigen, dass

$$D_x\varphi(\mathbb{R}^k) \subset T_pM \subset \ker D_ph.$$

Für die erste Inklusion, sei $u \in \mathbb{R}^k$ beliebig. Definieren wir $\gamma(t) := \varphi(x + tu)$, dann ist γ eine Kurve in M. Nach der Kettenregel gilt $\gamma'(0) = D_x\varphi(u)$, d.h., $D_x\varphi(u) \in T_pM$.

Für die zweite, sei $v \in T_pM$. Wir wählen eine Kurve γ in M durch $p = \gamma(0)$ mit $\gamma'(0) = v$. Für $|t|$ klein genug gilt $\gamma(t) \in M \cap V$ und deswegen $h(\gamma(t)) \equiv c$. Nach der Kettenregel gilt $0 = (h \circ \gamma)'(0) = D_ph(v)$, d.h. $v \in \ker D_ph$. □

a. Der Normalenraum

Jetzt versehen wir $\mathbb{R}^n$ mit dem gewöhnlichen Skalarprodukt $\langle v, w\rangle := \sum_1^n v_iw_i$. Dies erlaubt uns den Normalenraum zu definieren. (Später benutzen wir auch den induzierten Skalarprodukt auf $T_pM \subset \mathbb{R}^n$, um das Volumenelement zu definieren.)

Definition C2.4. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannifaltigkeit. Der *Normalenraum N_pM zu M in p* ist das orthogonale Komplement von $T_pM \subset \mathbb{R}^n$, d.h.

$$N_pM := T_p^\perp M = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, w\rangle = 0 \quad \forall w \in T_pM\}.$$

Ein Vektor $v \in N_pM$ heißt *Normalenvektor*. Falls $\|v\| = 1$, heißt v *Normaleneinheitsvektor*.

Bemerkung C2.5. Der Normalenraum hat Dimension $n - k$. Schreiben wir (lokal) $M = h^{-1}(c)$ mit $h = (h_1, \dots, h_{n-k})$, dann bilden die Vektoren $\operatorname{grad}_p h_i$ eine Basis für T_pM. Eine Hyperfläche $\{h = 0\}$ hat in jedem Punkt bis auf Vorzeichen einen eindeutigen Normaleneinheitsvektor

$$v_p = \pm\frac{\operatorname{grad}_p h}{\|\operatorname{grad}_p h\|}.$$

(Das Vorzeichen kann problematisch werden. Lokal können wir es so wählen, dass $p \mapsto v_p$ stetig ist. Das geht aber nur dann global, wenn M „orientierbar“ ist, z.B. nicht für einen Möbiusband.)

Bemerkung C2.6. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Hyperfläche. Man kann zeigen, dass M den umgebenden Raum $\mathbb{R}^n$ in genau zwei Teilen zerschneidet. Das heißt, das Komplement hat genau zwei Zusammenhangskomponenten: $\mathbb{R}^n \smallsetminus M = B \cup C$, wobei eine (sagen wir B) beschränkt ist und die andere unbeschränkt. Dann ist $K := M \cup B = \overline{B}$ auch kompakt und es gilt $M = \partial K = \partial B$. Weil der Beweis dazu eher schwierig ist, fangen wir hier lieber mit K an, und sagen, unter welchen Bedingungen der Rand ∂K eine Hyperfläche ist.

Definition C2.7. Eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Kompaktum mit glattem Rand*, falls es zu jedem $p \in \partial K$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion $h\colon U \to \mathbb{R}$ so gibt, dass 0 ein regulärer Wert von h ist und

$$K \cap U = \{x \in U : h(x) \le 0\}.$$

Bemerkung C2.8. Tatsächlich gibt es eine globale Funktion $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $K = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \le 0\}$.

Lemma C2.9. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann ist ∂K eine kompakte Hyperfläche.*

Beweis. Für $p \in \partial K$ seien U und $h\colon U \to \mathbb{R}$ wie in der Definition. Wir behaupten, dass $\partial K \cap U = \{x \in U : h(x) = 0\}$. Damit ist der Rand ∂K eine Hyperfläche; als abgeschlosse Teilmenge eines Kompaktums ist ∂K auch kompakt.

Um die Behauptung zu beweisen nehmen wir $x \in U$. Falls $h(x) > 0$, dann gilt $x \notin K$; damit ist x sicherlich kein Randpunkt. Falls $h(x) < 0$, gibt es (wegen der Stetigkeit von h) eine Umgebung V von x mit $h < 0$; deswegen ist $V \subset K$ und damit x kein Randpunkt.

Falls hingegen $h(x) = 0$, setzen wir $v := \operatorname{grad}_x h \ne 0$. Für kleines t gilt

$$\begin{aligned} h(x + tv) &= h(x) + D_xh(tv) + o(t) \\ &= h(x) + \langle v, tv\rangle + o(t) \\ &= h(x) + \|v\|^2 t + o(t). \end{aligned}$$

Deswegen gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass

$$\begin{aligned} t \in (0, \varepsilon) &\implies h(x + tv) > 0 \implies x + tv \notin K, \\ t \in (-\varepsilon, 0) &\implies h(x + tv) < 0 \implies x + tv \in K. \end{aligned}$$

Das heißt, eine beliebig kleine Umgebung von x enthält Punkte sowohl aus K als auch aus dem Komplement: x ist Randpunkt von K. □

Bemerkung C2.10. Der Vektor

$$\frac{\operatorname{grad}_p h}{\left\|\operatorname{grad}_p h\right\|} \in N_p(\partial K)$$

heißt *äußerer Normaleneinheitsvektor* von K in p, weil er „nach außen" zeigt im Sinne, dass $p + \varepsilon v \notin K$. (Der Rand ∂K ist immer orientierbar.)

`Ende der Vorlesung 2009 Juli 2`

---

b. Der Metriktensor

Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Als Unterraum im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ hat T_pM den induzierten Skalarprodukt $\langle v, w\rangle$. Es gibt leider keine natürliche Wahl einer Orthonormalbasis. Wie sieht ein Skalarprodukt bezüglich einer beliebigen Basis aus? Man benutzt hier die sogenannte Gram'sche Matrix.

Definition C2.11. Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und sei $\{b_i : i = 1, \dots, k\}$ eine Basis für V. Die *Gram'sche Matrix* bezüglich dieser Basis ist

$$g := (g_{ij}), \qquad g_{ij} := \langle b_i, b_j\rangle = g_{ji}.$$

Bemerkung C2.12. Seien $v, w \in V$. Bezüglich der Basis $\{b_i\}$ schreiben wir $v = \sum v_i b_i$ und $w = \sum w_i b_i$. Aus der Bilinearität des Skalarproduktes gilt dann

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i,j=1}^{k} v_i w_j \, g_{ij}.$$

Definition C2.13. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und sei $\varphi\colon U \to M$ eine lokale Parametrisierung der Mannigfaltigkeit M. Für $x \in U$ sei $p := \varphi(x) \in M$. Bezüglich der Basis der partiellen Ableitungen $\partial_i\varphi(x)$ hat der aus $\mathbb{R}^n$ induzierte Skalarprodukt auf T_pM die Gram'sche Matrix

$$g_{ij} := g_{ij}(x) := \left\langle \partial_i\varphi(x), \partial_j\varphi(x)\right\rangle.$$

Die Einträge der Matrix $g(x) = (g_{ij})$ hängen stetig von x ab. Die Abbildung $g\colon U \to \mathbb{R}^{k\times k}$ heißt (Riemann'scher) *Metriktensor* von M bezüglich der Parametrisierung φ.

Bemerkung C2.14. Sei $J_x\varphi$ die Jacobimatrix, d.h. die Darstellungsmatrix für $D_x\varphi$ bezüglich der Standardbasen für $\mathbb{R}^k$ bzw. $\mathbb{R}^n$. Dann ist der Metriktensor der Produkt von $J_x\varphi$ mit der Transponierten: $g(x) = (J_x\varphi)^T(J_x\varphi)$.

Bemerkung C2.15. Sei $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma\colon [a, b] \to U \subset \mathbb{R}^k$. Dann ist $\varphi \circ \gamma$ eine Kurve in M. Die Geschwindigkeit dieser Kurve ist

$$(\varphi \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=0}^{k} \gamma_i'(t)\partial_i\varphi(\gamma(t)).$$

Deswegen ist die Schnelligkeit die Wurzel aus

$$\left\|(\varphi \circ \gamma)'(t)\right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{k} \gamma_i'(t)\gamma_j'(t)\, g_{ij}(\gamma(t)).$$

Die Länge der Kurve ist dann natürlich das Integral dieser Schnelligkeit.

Bemerkung C2.16. Die Idee der Riemann'schen Geometrie ist, dass man eine Metrik auf einer abstrakten Mannigfaltigkeit (ohne Einbettung in $\mathbb{R}^n$) definieren kann, indem man eine Metriktensor g auf dem (abstrakten) Tangentenraum festlegt. Dieser hat bezüglich eines Koordinatensystems die Form $g(x) = (g_{ij})$. Mit dem Metriktensor kann man Längen von Kurven usw. ausrechnen.

c. Volumina

Sei V ein Skalarproduktraum. Mit dem Skalarprodukt kann man nicht nur die Längen der Vektoren und die Winkel dazwischen messen, sonder auch Volumina von Parallelotopen.

Im $\mathbb{R}^k$ hat der Einheitswürfel $[0, 1]^k$ Volumen 1. Nun sei $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung. Nach dem Substitutionsregel hat $P := A([0, 1]^k)$ Volumen $\lambda(P) = |\det A|$.

Definition C2.17. Sei $\{b_1, \dots, b_k\}$ eine Basis für V. Die Menge $P = \{\sum \lambda_i b_i : 0 \le \lambda_i \le 1\} \subset V$ heißt das durch $\{b_i\}$ erzeugte *Parallelotop*.

Ist $\{e_1, \dots, e_k\}$ eine Orthonormalbasis für V, dann gibt uns diese Basis einen Isomorphismus $V \to \mathbb{R}^k$ von Skalarprodukträumen, wobei $\{e_i\}$ auf die Standardbasis abgebildet wird. Wir benutzen diesen Isomorphismus um den Begriff „Volumen" vom $\mathbb{R}^k$ auf V zu übertragen. (Dabei merken wir, dass der Volumen unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis ist.)

Folgendes Lemma erlaubt uns, Volumina von Parllelotopen zu berechnen, ohne eine Orthonormalbasis (d.h. einen Isomorphismus zu $\mathbb{R}^k$) auswählen zu müssen.

Lemma C2.18. *Sei $\{b_i\}$ eine Basis für den Skalarproduktraum V und sei $g = (g_{ij})$ die Gram'sche Matrix dazu. Das durch $\{b_i\}$ erzeugte Parallelotop hat Volumen* $\operatorname{vol}(P) = \sqrt{\det g}$.

Beweis. Sei $\{e_1, \dots, e_k\}$ eine beliebige Orthonormalbasis und sei A die durch $e_i \mapsto b_i$ definierte lineare Abbildung. Nach Vergleich zum Falle $V = \mathbb{R}^n$ gilt $\operatorname{vol}(P) = |\det A|$. Es gilt aber auch $g = A^T A$ und deswegen $\det g = (\det A)^2$. □

C3. Das Integral

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir wollen das Integral von f über M definieren. Das letzte Lemma sollte als Begründung dazu dienen, welche Formel wir bezüglich einer lokalen Parametrisierung benutzen müssen.

Definition C3.1. Sei $\varphi\colon U \to V \subset M$ eine Parameterisierung ($U \subset \mathbb{R}^k$ offen) und sei g die Metriktensor für M bezüglich φ. Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ mit $f(p) = 0$ für $p \notin V$ heißt *integrierbar über M*, falls die Funktion $(f \circ \varphi)\sqrt{\det g}$ über U

integrierbar ist. Wir definieren dann das *Integral*

$$\int_M f(p)\,dS(p) := \int_U f(\varphi(x))\sqrt{\det g(x)}\,d\lambda(x).$$

Bemerkung C3.2. Man sagt, $dS(\varphi(x)) = \sqrt{\det g(x)}\,d\lambda(x)$ ist das k-dimensionale Flächenelement auf M. Tatsächlich definiert diese Formel ein Maß; wir benutzen sie eher nur als Gedächtnisstütze.

Bemerkung C3.3. Wir müssen noch zeigen, diese Definition hängt nicht von der Parametrisierung φ ab. Seien $\varphi\colon U \to V$ und $\tilde\varphi\colon \tilde U \to \tilde V$ zwei Parametrisierungen mit $\varnothing \neq W := V \cap \tilde V \subset M$. Weil $\varphi^{-1}(W) \subset U$ und $\tilde\varphi^{-1}(W) \subset \tilde U$ offen sind (wegen der Stetigkeit von φ und $\tilde\varphi$) dürfen wir annehmen, dass $V = \tilde V = W$. Das nächste Lemma sagt, dass die Parametertransformation ein Diffeomorphismus $U \to \tilde U$ ist.

Lemma C3.4. *Seien $\varphi\colon U \to V$ und $\tilde\varphi\colon \tilde U \to V$ zwei Parametrisierungen von $V \subset M$. Dann ist*

$$\psi := \varphi^{-1} \circ \tilde\varphi : \tilde U \to U$$

ein Diffeomorphismus.

Beweis. Weil φ und $\tilde\varphi$ Homöomorphismen sind, ist auch ψ ein Homöomorphismus. Wegen der Symmetrie ($\psi^{-1} = \tilde\varphi^{-1} \circ \varphi$) reicht es aus zu zeigen, dass ψ stetig differenzierbar ist.

Sei nun $p \in V$. Nach der Definition von Mannigfaltigkeit gibt es eine Umgebung $G \subset \mathbb{R}^n$ von p und einen Diffeomorphismus $\Phi\colon G \to \Phi(G) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(M \cap G) \subset \mathbb{R}^k \times \{0\}$. Sei Π die Projektion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Wir setzen

$$g := \Pi \circ \Phi \circ \varphi\colon U \to \mathbb{R}^k.$$

Weil φ eine Immersion ist, ist auch $\Phi \circ \varphi$ eine Immersion. Die Projektion Π ist zwar keine Immersion, auf $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ ist sie aber doch eine Immersion. Deswegen ist Dg ist injektiv und damit bijektiv; g ist nach dem Umkehrsatz lokal ein Diffeomorphismus. Wegen $\psi = g^{-1} \circ \Pi \circ \Phi \circ \tilde\varphi$ folgt, dass ψ stetig differenzierbar ist. □

Jetzt möchten wir die Metriktensoren bezüglich der beiden Parametrisierungen vergleichen.

Lemma C3.5. *Seien $\varphi\colon U \to V$ und $\tilde\varphi\colon \tilde U \to V$ zwei Parametrisierungen von $V \subset M$ und sei*

$$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_k) = \varphi^{-1} \circ \tilde\varphi$$

die Transformation dazwischen. Seien (g_{ij}) bzw. $(\tilde g_{ij})$ die Metriktensoren bezüglich φ bzw. $\tilde\varphi$. Dann gelten

$$\tilde g_{lm} = \sum_{i,j=1}^{k} (\partial_l \psi_i)(\partial_m \psi_j) g_{ij}, \qquad \det \tilde g(x) = (\det D_x\psi)^2 \det g(\psi(x)).$$

Beweis. Wegen $\tilde\varphi = \varphi \circ \psi$ gilt nach der Kettenregel $\partial_l \tilde\varphi = \sum_i \partial_l \psi_i \partial_i \varphi$. Die gewünschten Formeln folgen dann direkt aus der Definition von g_{ij}. □

```
Ende der Vorlesung 2009 Juli 7
```

Korollar C3.6. *Das oben definierte Integral ist von der Parametrisierung unabhängig.*

Beweis. Seien φ, $\tilde\varphi$, ψ, g, $\tilde g$ wie im Lemma. Seien $h\colon U \to \mathbb{R}$ und $\tilde h\colon \tilde U \to \mathbb{R}$ die Funktionen $h = (f \circ \varphi)\sqrt{\det g}$ und $\tilde h = (f \circ \tilde\varphi)\sqrt{\det \tilde g}$. Dann gilt nach dem Lemma $\tilde h = (h \circ \psi)\,|\det D\psi|$. Nach der Substitutionsregel gilt deswegen

$$\int_{\tilde U} \tilde h\,d\lambda = \int_U h\,d\lambda. \qquad \square$$

Um das Intergral auf allgemeine Funktionen zu erweitern, benutzen wir eine Zerlegung der Eins.

Definition C3.7. Sei $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung eines metrischen Raumes X. Eine dieser Überdeckung untergeordnete *Zerlegung der Eins* ist eine Familie reeller Funktionen $\zeta_\alpha : X \to [0,1]$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\operatorname{supp} \zeta_\alpha \subset U_\alpha$ für jedes $\alpha \in A$,
2. jedes $x \in X$ hat eine Umgebung U so, dass $\zeta_\alpha\big|_U \equiv 0$ für alle α ausserhalb einer endlichen Indexmenge $E \subset A$,
3. $\sum_{\alpha \in A} \zeta_\alpha \equiv 1$.

Falls die Funktionen ζ_α stetig bzw. integrierbar bzw. $\cdots$ sind, dann heißt die Zerlegung der Eins auch *stetig* bzw. *integrierbar* bzw. $\cdots$.

Bemerkung C3.8. Weil jeder metrische Raum „parakompakt“ ist, gibt es zu jeder offenen Überdeckung $\{U_\alpha\}$ eine untergeordnete stetige Zerlegung der Eins. Für den Fall $X = \mathbb{R}^n$ kann man sogar verlangen, dass die Funktionen ζ_α (beliebig oft) stetig differenzierbar sind.

Beispiel C3.9. Die Wavelet-Basis $\{H^m_{\mathbf{j}} : \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n\}$, die wir am Anfang des Semesters benutzten, ist eine stetige Zerlegung der Eins. (Vgl. A4.5.) Wie wir schon bemerkt haben, kann man mit einer ähnlichen Konstruktion auch differenzierbare Zerlegungen bauen.

Bemerkung C3.10. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Jedes $p \in M$ hat eine Umgebung V_p mit einer Parametrisierung $\varphi\colon U \to V$. Diese Umgebungen Überdecken M. Um der Einfachheit willen, betrachten wir nur den Fall, dass es eine endliche Teilüberdeckung gibt. (Offensicht stimmt dies z.B. für jedes kompakte M. Es gibt aber Mannigfaltigkeiten – z.B. eine Ebene mit unendlich vielen Henkeln –, die unendlich viele Parametrisierungen brauchen.)

Bemerkung C3.11. Für das Integral benutzen wir eine Zerlegung der Eins. Diese muss lokal integrierbar sein aber nicht unbedingt stetig. Sei $\{V_i : 1 \le i \le m\}$ eine endliche offene Überdeckung von M. Sei ζ_i die charakteristische Funktion von $V_i \smallsetminus \bigcup_{j<i} V_j$. Dann ist $\{\zeta_i\}$ eine lokal integrierbare Zerlegung der Eins.

Definition C3.12. Sei M eine Mannigfaltigkeit und seien

$$\varphi_i\colon U_i \to V_i \subset M$$

Parametrisierungen mit $\bigcup_{i=1}^m V_i = M$. Sei $\{\zeta_i\}$ eine der Überdeckung $\{V_i\}$ untergeordnete, lokal integrierbare Zerlegung der Eins. Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ heißt dann *integrierbar über M*, falls $f\big|_{V_i}$ für jedes i integrierbar ist. Das *Integral* ist

$$\int_M f\, dS := \sum_{i=1}^m \int_M \zeta_i f\, dS.$$

Bemerkung C3.13. Für die Funktionen $f\big|_{V_i}$ bzw. $\zeta_i f$ benutzen wir die erste Definition von Integrierbarkeit über M. Dass $f\big|_{V_i}$ integrierbar ist heißt, dass $(f\circ\varphi_i)\sqrt{\det g_i}$ auf U_i integrierbar ist. Weil $\zeta_i\circ\varphi_i$ lokal integrierbar und beschränkt ist, folgt, dass $\zeta_i f$ über M integrierbar ist.

Lemma C3.14. *Diese Definition ist von der Überdeckung und der Zerlegung der Eins unabhängig.*

Beweis. Seien $\tilde\varphi_j\colon \tilde U_j \to \tilde V_j$ andere Parametrisierungen ($j = 1,\dots,\tilde m$) und sei $\{\tilde\zeta_j\}$ eine Zerlegung der Eins dazu. Es gilt

$$\sum_{i=1}^m \int_M \zeta_i f\, dS = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{\tilde m} \int_M \tilde\zeta_j\zeta_i f\, dS = \sum_{j=1}^{\tilde m}\int_M \tilde\zeta_j f\, dS.$$

□

Definition C3.15. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt *integrierbar*, falls χ_A integrierbar über M ist. Das Integral

$$\operatorname{vol}_k(A) := \int_A dS = \int_M \chi_A\, dS$$

heißt *k-dimensionales Volumen* (oder *k-dimensionaler Flächeninhalt*) von A.

Bemerkung C3.16. Das Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^k$ wird definiert um das k-dimensionale Volumen einer beliebigen Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ zu messen. Dies existiert auch für $k \notin \mathbb{Z}$. Es gilt z.B. für die Cantormenge C, dass $0 < \mathcal{H}^k(C) < \infty$ nur für $k = {}^{\log 2}/_{\log 3}$.

Bemerkung C3.17. Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M im $\mathbb{R}^n$ ist einfach eine offene Teilmenge. Wir können $\mathrm{id}\colon U \to U$ als einzige Parametrisierung wählen. Das Integral über M als Mannigfaltigkeit ist nichts anderes als das Integral über U als integrierbare Teilmenge.

Bemerkung C3.18. Ist $f = (f_1,\dots,f_m)$ eine vektorwertige Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}^m$, dann setzen wir

$$\int_M f\, dS := \Big(\int_M f_1\, dS, \dots, \int_M f_m\, dS\Big).$$

Für jeden konstanten Vektor $v \in \mathbb{R}^m$ gilt $\langle v, \int f\rangle = \int\langle v, f\rangle$.

C4. Der Gauß'sche Integralsatz

Sei $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und sei $X\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, die man sich z.B. als Strömungsfeld einer Flüssigkeit vorstellt. Der Durchfluss von X durch ∂K ist

$$\int_{\partial K}\langle X, \nu\rangle\, dS,$$

wobei ν das äußere Normaleneinheitsvektor von K ist. Die Divergenz $\operatorname{div} X$ wird als Quellendichte interpretiert, d.h. $\int_K \operatorname{div} X\, d\lambda$ ist das Gesamteffekt aller Quellen und Senken innerhalb von K. Der Gauß'sche Integralsatz sagt, dass die beiden gleich sind:

$$\int_{\partial K}\langle X, \nu\rangle\, dS = \int_K \operatorname{div} X\, d\lambda.$$

Insbesondere ist X genau dann divergenzfrei, wenn der Durchfluss durch jede kompakte Hyperfläche ∂K Null ist.

Für $n = 1$ ist dieser Integralsatz nichts anderes als der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Das heißt, wir betrachten hier eine (andere als die in B7 betrachtete) Erweiterung auf höhere Dimensionen. Eine erhebliche Erweiterung des Gauß'schen Satzes stellt der allgemeine Satz von Stokes über Integration von Differentialformen dar. Dieser sehr grundlegende Ergebnis der Differentialgeometrie wird wiederum in der geometrischen Maßtheorie erweitert, um sehr allgemeine nichtglatte Mannigfaltigkeiten zu betrachten.

`Ende der Vorlesung 2009 Juli 9`

Mithilfe einer Zerlegung der Eins werden wir den Beweis des Gauß'schen Satzes auf zwei Sonderfällen aufbauen.

Weil wir Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$ betrachten, ist es oft nützlich folgende Koordinaten zu benutzen:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}, \quad x = (y,t), \quad y = (x_1,\dots,x_{n-1}), \quad t = x_n.$$

Lemma C4.1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f \in C_c(U)$ stetig differenzierbar. Dann gilt $\int_U \operatorname{grad} f\, d\lambda = 0$.*

Beweis. Indem wir f durch seine triviale Fortsetzung ersetzen, dürfen wir annehmen $U = \mathbb{R}^n$. Es reicht aus, die letzte Komponente $\partial_n f$ des Gradients zu betrachten. Sei $R > 0$ groß genug, dass $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^{n-1}\times(-R,R)$. Für jedes $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ gilt nach dem Hauptsatz

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_n f(y,t)\, dt = \int_{-R}^R \tfrac{\partial}{\partial t} f(y,t)\, dt = f(y,R) - f(y,-R) = 0.$$

Deswegen gilt nach dem Satz von Fubini (bzw. der Definition des Integrals für stetige Funktionen), dass

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_n f(x)\, d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}} \partial_n f(y,t)\, dt\, d\lambda(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 0\, d\lambda(y) = 0.\end{aligned}$$

□

Korollar C4.2. *Sei $X\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit kompaktem Träger. Dann gilt $\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} X\, d\lambda = 0$.*

Beweis. Wir schreiben $\operatorname{div} X = \sum \partial_i X_i$ und wenden das Lemma auf jede Komponente X_i an; insbes. gilt $0 = \int \partial_i X_i$. □

Lemma C4.3. *Sei $U \in \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $I = (a,b)$ ein offenes Intervall. Der Produkt $V := U \times I$ ist offen im $\mathbb{R}^n$. Sei*

$$M := \{(y,t) \in V : t = h(y)\}$$

der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $h\colon U \to I$ und sei

$$E = \{(y,t) \in V : t \ge h(y)\}$$

der sogenannte Epigraph*. Für jede stetig differenzierbare Funktion $f \in C_c(V)$ gilt*

$$\int_E \operatorname{grad} f \, d\lambda = \int_M f\nu \, dS,$$

wobei ν der äußere Normaleneinheitsvektor ist.

Beweis. Die Mannigfaltigkeit M wird durch $\varphi\colon y \mapsto (y, h(y))$ parametrisiert und ist auch die Niveaumenge $\{(y,t) : h(y) - t = 0\}$. Das heißt, $(\operatorname{grad} h, -1)$ ist ein Normalenvektor. Mit $s(y) := \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h\|^2}$ gilt $\nu = \frac{1}{s(y)}(\operatorname{grad} h, -1)$. Für den Metriktensor bezüglich φ gilt $\sqrt{\det g} = s(y)$.

Wir betrachten die Integralformel komponentenweise, zunächst die letzte Komponente. Nach dem Hauptsatz gilt

$$\int_{h(y)}^b \partial_n f(y,t)\, dt = 0 - f(y, h(y)) = -f(\varphi(y))$$

für jedes $y \in U$. Wegen $\nu_n = {}^{-1}/_{\sqrt{\det g}}$ gilt dann

$$\int_E \partial_n f \, d\lambda(x) = \int_U -f(\varphi(y))\, d\lambda(y) = \int_M f\nu_n \, dS.$$

Nun sei $1 \le i \le n-1$. Wir definieren $F\colon V \to \mathbb{R}$ durch

$$F(y,t) := \int_t^b f(y,\tau)\, d\tau.$$

Es gelten $\partial_n F = -f$ und

$$\partial_i F(y,t) = \int_t^b \partial_i f(y,\tau)\, d\tau.$$

Wir betrachten nun die Funktion $G = F \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$, d.h., $G(y) = F(y, h(y))$. Nach der Kettenregel gilt

$$\partial_i G(y) = \int_{h(y)}^b \partial_i f(y,\tau)\, d\tau \; - \; f(\varphi(y))\, \partial_i h(y).$$

Nach dem ersten Lemma gilt aber $\int_U \partial_i G \, d\lambda = 0$, weil G kompakten Träger in U hat. Deswegen erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_E \partial_i f \, d\lambda(x) &= \int_U \Big(\int_{h(y)}^b \partial_i f(y,\tau)\, d\tau \Big) d\lambda(y) \\ &= \int_U f(\varphi(y)) \partial_i h(y)\, d\lambda(y) = \int_M f\nu_i \, dS.\end{aligned}$$ □

Satz C4.4 (Gauß'scher Integralsatz). *Sei $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und sei $X\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_{\partial K} \langle X, \nu \rangle \; dS \; = \int_K \operatorname{div} X \, d\lambda,$$

wobei ν das äußere Normaleneinheitsvektor von K ist.

Beweis. Weil die kompakte Mannigfaltigkeit ∂K lokal bei jedem Punkt als Graphen dargestellt werden kann (C1.6) können wir eine endliche offene Überdeckung

$$\bigcup_{j=1}^m V_j \supset \partial K$$

so finden, dass V_j (nach Umordnung bzw. Vorzeichenwechsel der Koordinaten) die Form aus dem letzten Lemma hat. D.h., $V_j = U \times (a,b)$ und es gibt eine stetig differenzierbare Funktion $h\colon U \to (a,b)$ mit

$$K \cap U_j = \{(y,t) \in U_j : t \ge h(y)\}.$$

Mit $V_0 := K \smallsetminus \partial K$ ist $\{V_j : j = 0, \dots, m\}$ dann eine endliche offene Überdeckung von K. Nun sei $\{\zeta_j\}$ eine zu $\{V_j\}$ untergeordnete stetig differenzierbare Zerlegung der Eins. (Vgl. C3.8, C3.9.)

Weil die gewünschte Formel linear in X ist, reicht es aus, die Formel für jedes $\zeta_j X$ zu beweisen, d.h. für ein stetig differenzierbares Vektorfeld (das wir jetzt X nennen) mit Träger in V_j.

Im Falle $j = 0$ ist der Durchfluss Null; die Formel folgt direkt aus dem Korollar zum ersten Lemma.

Im Falle $j > 0$ wenden wir das zweite Lemma auf jede Komponente X_i an. Es gilt insbesondere

$$\int_K \partial_i X_i \, d\lambda = \int_{\partial K} X_i \nu_i \, dS.$$

Die Summe über $i = 1, \dots, n$ ist die Gauß'sche Formel. □

Korollar C4.5 (Green'sche Formel). *Seien $K \subset U$ und ν wie im Satz. Seien $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_K (f\Delta g - g\Delta f)\, d\lambda = \int_{\partial K} (f\partial_\nu g - g\partial_\nu f)\, dS.$$

Beweis. Wir wenden den Satz auf das Vektorfeld

$$X := f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f$$

an. Details als Aufgabe. □

`Ende der Vorlesung 2009 Juli 14`