# 10. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „ANALYSIS III“ IM SOMMERSEMESTER 2009

**Tutoriumsaufgabe 32.** Zeige, dass man für $x > 0$ den Ausdruck

$$\int_0^\infty e^{-xt}\,dt$$

beliebig oft unter dem Integral differenzieren darf und benutze dies, um aus

$$\int_0^\infty e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$$

(Nachrechnen!) zu folgern, dass

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = n!$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

**Tutoriumsaufgabe 33.** Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Zeige, dass $f * g$ stetig ist.

**Hausaufgabe 28.** Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $n > 0$. Zeige:

(i) Für alle $a > 0$ ist

$$\lambda^*(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq a\}) < \infty.$$

(ii) Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $g \circ f$ ebenfalls integrierbar, so ist $g(0) = 0$.

*Tipp.* Für (ii) zeige, dass sich, wenn $g(0) \neq 0$ wäre, $\mathbb{R}^n$ als Vereinigung zweier Mengen von endlichem äußeren Maß darstellen ließe.

**Hausaufgabe 29.** Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Zeige, dass $A$ genau dann messbar ist, wenn $A \cap K$ für alle kompakten $K \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar ist.

**Hausaufgabe 30.** Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und mit kompaktem Träger. Zeige, dass $f * g$ stetig differenzierbar ist.

---

*Abgabe:* am 1. Juli vor der Übung.