11. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „ANALYSIS III“ IM SOMMERSEMESTER 2009

Tutoriumsaufgabe 34. Es sei $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $p \in \mathbb{R}^n$. Welche Implikationen gelten im allgemeinen zwischen den folgenden beiden Aussagen?

(i) p ist Lebesquepunkt von f, das heißt $\Theta_p(|f - f(p)|) = 0$.
(ii) $\Theta_p(f) = f(p)$.

Für $f = \chi_A$ sind die beiden Aussagen äquivalent. Warum?

Tutoriumsaufgabe 35. Es sei $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $p \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass aus approximativer Stetigkeit von f in p im allgemeinen nicht folgt, dass p ein Lebesguepunkt von f ist.

Bemerkung. Das ist eine Hälfte von Bemerkung B7.12.

Tutoriumsaufgabe 36. Rechtfertige die Gleichung am Ende des Beweises von Korollar B7.23.

Hausaufgabe 31. Zeige, dass

$$\operatorname*{lim\,ap}_{(x,y)\to(0,0)} |x|^{|y|} = 1$$

wie in Beispiel B7.10 behauptet.

Tipp. Zeige zunächst, dass für festes $\varepsilon > 0$ gilt: Ist $y > 0$ klein genug, so ist $(y^2)^y > 1 - \varepsilon$.

Hausaufgabe 32. Es sei $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $p \in \mathbb{R}^n$ eine Lebesguepunkt von f. Zeige, dass f in p approximativ stetig ist.

Bemerkung. Das ist eine Hälfte von Bemerkung B7.12.

Hausaufgabe 33.

(i) Es seien $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ und ϑ der Winkel zwischen $\overline{0\,x_0}$ und $\overline{0\,x_1}$. Zeige:
  (a) Ist $2 = \|x_0\| = \|x_1\|$ und $\cos\vartheta \leq \frac{7}{8}$, so ist $\|x_1 - x_0\| \geq 1$.
  (b) Ist $2 \leq \|x_0\| \leq \|x_1\|$ und $\|x_1 - x_0\| \geq \|x_1\| - 1$, so ist $\cos\vartheta \leq \frac{7}{8}$.
(ii) Führe den Beweis von Lemma B7.17 zu Ende.

Tipp. Für (i) begründe zunächst, warum angenommen werden kann, dass $n = 2$ ist und beispielsweise x_1 auf einer Koordinatenachse liegt.

Abgabe: am 8. Juli vor der Übung.