12. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „ANALYSIS III“ IM SOMMERSEMESTER 2009

Tutoriumsaufgabe 34. Beweise Lemma C1.6.

Tutoriumsaufgabe 35. Zeige: Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ gleichzeitig eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit und eine ℓ-dimensionale Mannigfaltigkeit, so ist $k = \ell$ oder $M = \emptyset$.

Tutoriumsaufgabe 36. Zeige, dass
$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq 1\}$$
ein Kompaktum mit glattem Rand ist.

Tutoriumsaufgabe 37. Es sei $p \in \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Zeige, dass
$$T_p\mathbb{S}^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n \colon \langle u, p \rangle = 0\}.$$
Was ist $N_p\mathbb{S}^{n-1}$?

Tutoriumsaufgabe 38. Zeige, dass
$$\{(x \sin \rho, x \cos \rho, y) \colon (x, y, \rho) \in \mathbb{R}^3, (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$$
ein Kompaktum mit glattem Rand ist.

Übungsaufgabe 5. Zeige, dass $[-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ kein Kompaktum mit glattem Rand ist.

Übungsaufgabe 6. Es sei $p \in \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Gib eine Parametrisierung von $\mathbb{S}^{n-1}$ bei p an, und bestimme den zugehörigen Riemannschen Metriktensor.

Abgabe: am 15. Juli vor der Übung.

Zusatzaufgabe 1. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1x_3 - x_2^2, x_2x_4 - x_3^2, x_1x_4 - x_2x_3).$$

Zeige, dass $M := \{x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} : f(x) = 0\}$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

Tipp. Für $p \in M$ betrachte insbesondere die Fälle $p_1 \neq 0$ und $p_4 \neq 0$.

Zusatzaufgabe 2. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$M := \{(x, y, z)\colon x = 2y,\ x^2 + z^2 = 1\}.$$

Zeige, dass M eine Mannigfaltigkeit ist und bestimme für $p \in M$ den Tangentialraum T_pM und den Normalenraum N_pM.

Zusatzaufgabe 3. Es sei

$$M := \{(x \sin\rho, x\cos\rho, y)\colon (x, y, \rho) \in \mathbb{R}^3, (x-2)^2 + y^2 = 1\}.$$

Aus Tutoriumsaufgabe 38 wissen wir, dass M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Es sei $p = (x\sin\rho, x\cos\rho, y) \in M$. Zeige, dass

$$N_pM = \{\lambda((x-2)\sin\rho, (x-2)\cos\rho, y)\colon \lambda \in \mathbb{R}\}$$

und gib eine Basis für T_pM an.

Zusatzaufgabe 4. Es sei $p \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$. Gib eine Parametrisierung von $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ bei p an (und zeige damit, dass $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ eine Mannigfaltigkeit ist), und bestimme den zugehörigen Riemannschen Metriktensor.

Zusatzaufgabe 5. Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$. Zeige, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} f\, d\lambda = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} r^2 \sin\vartheta\, f(r\sin\vartheta\cos\rho, r\sin\vartheta\sin\rho, r\cos\vartheta)\, dr\, d\vartheta\, d\rho$$

(und insbesondere, dass die rechte Seite der Gleichung existiert).

Bemerkung. Der Großteil der Rechnung wurde schon früher für eine ähnliche, aber *nicht* identische Aufgabe durchgeführt. Es soll aber hier unter anderem wirklich argumentiert werden, warum eine gewisse Abbildung ein Diffeomorphismus ist und was ihr Definitionsbereich und Bild sind.