2. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „ANALYSIS III“ IM SOMMERSEMESTER 2009

Übungsaufgabe 2. Es sei $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$. Zeige mit Hilfe der Substitutionsregel aus Satz A5.18, dass

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r\cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr\,d\varphi\\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} r\cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi\,dr.\end{aligned}$$

Tutoriumsaufgabe 6. Es sei $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ und $\pi \in S_n$ eine Permutation. Zeige

$$\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_{\pi(1)}\cdots dx_{\pi(n)}$$

als Spezialfall eines Satzes aus der Vorlesung.

Tutoriumsaufgabe 7. Es sei

$$\begin{aligned}s\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}\\ (x,y) &\mapsto \frac{1}{9}\,(2x-y)^2 + \frac{1}{9}\,(x-y)^2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}f\colon \mathbb{R}^2 &\to R\\ u &\mapsto \begin{cases} 1 - s(u)^{\frac{1}{2}}, & s(u) \le 1,\\ 0, & s(u) \ge 1.\end{cases}\end{aligned}$$

Berechne $\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda$, indem Du das Integral auf das aus Übungsaufgabe 1 zurückführst.

Tutoriumsaufgabe 8. Es sei

$$\begin{aligned}f\colon \mathbb{R}^2 &\to R\\ x &\mapsto \begin{cases} 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & x_1^2 + x_2^2 \le 1,\\ 0, & x_1^2 + x_2^2 \ge 1.\end{cases}\end{aligned}$$

die Funktion aus Übungsaufgabe 1. Berechne das Integral $\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda$ mit Hilfe von Übungsaufgabe 2.

Abgabe: am 6. Mai vor der Übung.

Tutoriumsaufgabe 9. Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to R$$
$$x \mapsto \begin{cases} 2\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}, & x_1^2+x_2^2 \le 1, \\ 0, & x_1^2+x_2^2 \ge 1. \end{cases}$$

die Funktion aus Hausaufgabe 1. Berechne das Integral $\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda$ mit Hilfe von Übungsaufgabe 2.

Hausaufgabe 4. Es sei

$$r\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto x^2 - xy + y^2$$

und

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to R$$
$$u \mapsto \begin{cases} \sqrt{1-r(u)}, & r(u) \le 1, \\ 0, & r(u) \ge 1. \end{cases}$$

Berechne $\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda$.

Tipp. Schreibe $r(u)$ als $\|Au\|^2$ für eine Matrix A und benutze das Ergebnis aus Hausaufgabe 1.

Hausaufgabe 5. Es sei $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$ eine rotationsinvariante Funktion, das heißt $f(Au) = f(u)$ für alle $A \in SO(2)$, $u \in \mathbb{R}^2$. Zeige mit Übungsaufgabe 2, dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda = 2\pi \int_0^\infty x f(x,0)\,dx.$$

Hausaufgabe 6. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige 2π-periodische Funktion mit $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass

$$g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \begin{cases} 1 - \frac{r}{f(\varphi)}, & r \le f(\varphi), \\ 0, & r \ge f(\varphi) \end{cases}$$

(für $r \ge 0$) eine Funktion $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$ definiert, und zeige mit Übungsaufgabe 2, dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} g\,d\lambda = \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} f(\varphi)^2\,d\varphi.$$