3. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „ANALYSIS III" IM SOMMERSEMESTER 2009

Tutoriumsaufgabe 10. Beweise Lemma A6.4.

Tutoriumsaufgabe 11. Es seien $f, g\colon X \to R$ halbstetig von unten (oben). Zeige, dass auch $f + g$ halbstetig von unten (oben) ist.

Tutoriumsaufgabe 12. Sei $A \subset X$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) A ist abgeschlossen.
(ii) χ_A ist halbstetig von oben.
(iii) Für jede stetige Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in A \setminus A^\circ$ ist die Funktion

$$\bar{f}\colon X \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

halbstetig von oben.

Tutoriumsaufgabe 13. Zeige die folgenden Aussagen.

(i) $\big\{(a, +\infty]\colon a \in \bar{\mathbb{R}}\big\} \cup \big\{\bar{\mathbb{R}}\big\}$ ist eine Topologie auf $\bar{\mathbb{R}}$.
(ii) In dieser ist eine Teilmenge genau dann kompakt, wenn sie ihr Minimum enthält.

Hausaufgabe 7. Sei $U \subset X$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) U ist offen.
(ii) χ_U ist halbstetig von unten.
(iii) Für jede stetige Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ mit $\overline{\{x \in U\colon f(x) < 0\}} \subset U$ ist die Funktion

$$\bar{f}\colon X \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in U, \\ 0, & x \notin U \end{cases}$$

halbstetig von unten.

Abgabe: am 13. Mai vor der Übung.

Hausaufgabe 8. Es seien $f, g\colon X \to R$ nicht-negative, von unten (oben) halbstetige Funktionen. Zeige, dass auch $f \cdot g$ von unten (oben) halbstetig ist.

Hausaufgabe 9. Es sei $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^3)$. Zeige, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \, d\lambda = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} r^2 \sin\vartheta \, f(r\sin\vartheta\cos\rho, r\sin\vartheta\sin\rho, r\cos\vartheta) \, dr \, d\vartheta \, d\rho.$$

Dabei darfst Du annehmen, dass $\operatorname{supp} f \subset U$, wobei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine geeignete offene dichte Teilmenge ist.

Hausaufgabe 10. Sei $k \in \mathbb{Z}$ und

$$\varphi_k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$(r\cos\rho, r\sin\rho) \mapsto (r\cos(k\rho), r\sin(k\rho)).$$

Weiter sei $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Zeige, dass

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \det(D\varphi_k) \cdot (f \circ \varphi_k) \, d\lambda = k \cdot \int_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} f \, d\lambda.$$