4. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „ANALYSIS III“ IM SOMMERSEMESTER 2009

Tutoriumsaufgabe 14. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$, $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig, und

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in (a,b), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

halbstetig von unten. Zeige, dass

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda = \int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx.$$

Definition. Für eine offene oder abgeschlossene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\operatorname{vol} M := \operatorname{vol}_n M := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_M \, d\lambda.$$

Tutoriumsaufgabe 15. Zeige, dass das Integral aus Hausaufgabe 1 mit unserer jetzigen Definition tatsächlich das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ berechnet, und berechne dieses Volumen erneut, nun mit Hausaufgabe 9.

Tutoriumsaufgabe 16. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und

$$V := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon a \le x \le b,\, y^2 + z^2 \le f(x)^2 \right\}.$$

Finde eine Formel für $\operatorname{vol}_3(V)$. Kannst Du das Integral aus Übungsaufgabe 1 als Spezialfall erhalten?

Hausaufgabe 11. Beweise Satz A6.33.

Hausaufgabe 12. Es sei $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{H}^+(\mathbb{R})$. Zeige, dass

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx := \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx.$$

Abgabe: am 20. Mai vor der Übung.

Hausaufgabe 13. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge, $l \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine lineare Abbildung, die Skalarprodukte erhält, und $p \in \mathbb{R}^{n+1}$. Weiterhin sei h der Abstand (in der euklidischen Metrik) von p zu $\operatorname{im} l$ und

$$V := \{sp + (1-s)l(a) \colon 0 \leq s \leq 1,\, a \in A\}\,.$$

Zeige, dass

$$\mathrm{vol}_{n+1}(V) = \frac{h}{n+1}\,\mathrm{vol}_n(A).$$

Bemerkung. Zitiere die benutzten Sätze aus dem Skript!