# 5. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „ANALYSIS III“ IM SOMMERSEMESTER 2009

**Tutoriumsaufgabe 17.** Beweise Lemma A7.5.

**Tutoriumsaufgabe 18.** Beweise Lemma A7.15.

**Tutoriumsaufgabe 19.** Finde wie in Beispiel A7.14 gefordert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^n)$ mit $f \geq 0$, $f(0) = +\infty$, $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda < \varepsilon$.

**Tutoriumsaufgabe 20.** Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

(i) Zeige, dass $f$ genau dann Lebesque-integrierbar ist, wenn
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty.$$

(ii) Wie lässt sich das auf eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verallgemeinern?

(iii) Gib ein Beispiel für ein solches $f$, das nicht Lebesque-integrierbar ist, obwohl das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$ existiert (und endlich ist).

**Tutoriumsaufgabe 21.** Es sei $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Familie paarweise disjunkter offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und $A_0 \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge des $R^n$, die $\bigcup_k U_k$ enthält. Wir definieren rekursiv $A_{k+1} := A_k \setminus U_k$. Zeige, dass
$$\lambda^* \left( \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \right) = \lim_{k\to\infty} \lambda^*(A_k).$$

**Hausaufgabe 14.** Beweise Lemma A7.24: Ist $W$ ein endlich-dimensionaler Banachraum und $f\colon \mathbb{R}^n \to W$ integrierbar, so ist auch $\|f\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar.

**Hausaufgabe 15.** Beweise Lemma A8.2.

**Hausaufgabe 16.** Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Zeige, dass
$$\lambda^*(A) = \inf_{\substack{U \supset A \\ U \text{ offen}}} \lambda^*(U).$$

*Tipp.* Für $f \geq \chi_A$ betrachte $U := f^{-1}[(1-\varepsilon, +\infty]]$.

---

*Abgabe:* am 27. Mai vor der Übung.