7. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „ANALYSIS III“ IM SOMMERSEMESTER 2009

Tutoriumsaufgabe 23. Finde ein Beispiel für integrierbare Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $f \cdot g$ nicht integrierbar ist.

Tutoriumsaufgabe 24. Existiert eine Folge (f_k) integrierbarer Funktionen in $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, so dass auch $\lim_k f_k$ integrierbar ist und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} f_k \, d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\lambda,$$

obwohl der Satz über dominierte Konvergenz nicht anwendbar ist, da keine integrable Funktion g mit $|f_k| \leq g$ für alle k existiert?

Tutoriumsaufgabe 25. Beweise Lemma B2.3.

Hausaufgabe 19. Beweise Korollar B1.5:

Sei (f_k) eine Folge integrierbarer Funktionen $f_k \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ebenfalls integrierbar. Ist $f_k \leq g$ für alle k und ist $\overline{\lim}_k \int f_k \, d\lambda > -\infty$, so ist $\overline{\lim}_k f_k \, d\lambda$ integrierbar und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\lim_{k\to\infty}} f_k \, d\lambda \geq \overline{\lim_{k\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\lambda.$$

Hausaufgabe 20. Beweise Korollar B1.9.

Hausaufgabe 21. Für Folgen (f_k) integrierbarer Funktionen $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und integrierbare Funktionen $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ betrachte die folgenden beiden Aussagen.

(i) $\lim_k f_k = g$ fast überall.
(ii) $\lim_k \|f_k - g\|_{L_1} = 0$.

Impliziert eine der beiden Aussagen immer die andere?

Abgabe: am 10. Juni vor der Übung.