8. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „ANALYSIS III“ IM SOMMERSEMESTER 2009

Tutoriumsaufgabe 26. Beweise Bemerkung B2.15:

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann lokal integrierbar, wenn jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ eine Umgebung U besitzt, so dass f über U integrierbar ist.

Tutoriumsaufgabe 27. Zeige:

(i) Ist $f = g$ fast überall, so ist $\operatorname{ess\,sup} f = \operatorname{ess\,sup} g$.
(ii) Ist f stetig, so ist $\operatorname{ess\,sup} f = \sup f$.
(iii) Ist $f \geq 0$ fast überall, so ist $fg \leq f \cdot \operatorname{ess\,sup} g$ fast überall.

Tutoriumsaufgabe 28. Zeige, dass für $n > 0$ und $1 \leq p < q \leq \infty$ weder $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$ noch $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Tutoriumsaufgabe 29. Wir versehen $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit der Suprenumsnorm und betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} j\colon \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) &\to L^p(\mathbb{R}^n), \\ f &\mapsto [f]. \end{aligned}$$

Ist sie injektiv? Ist sie stetig? Ändert sich etwas, wenn wir $\mathbb{R}^n$ durch eine offene beschränkte Teilmenge ersetzen?

Hausaufgabe 22. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ integrierbar (im Sinne von Definition A7.22) und $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ Lipschitz-stetig mit $g(0) = 0$. Zeige, dass $g \circ f$ integrierbar ist.

Hausaufgabe 23. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar und $c \in \mathbb{R}$. Zeige, dass für jedes kompakte $K \subset \mathbb{R}^n$ die Menge $K \cap f^{-1}[[c, \infty)]$ integrierbar ist.

Tipp. Zunächst kann $c = 1$ angenommen werden, denn $f(x) \geq c \iff f(x) + 1 - c \geq 1$, und ist f lokal integrierbar, so auch $f + 1 - c$.

Approximiere die Funktion $\chi_{[1,\infty)}$ geeignet, um Hausaufgabe 22 anwenden zu können und benutze dann einen Konvergenzsatz.

Abgabe: am 17. Juni vor der Übung.

Hausaufgabe 24. Zeige die folgende Verallgemeinerung der Hölderschen Ungleichung: Seien $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, und $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}$ mit $1 \le p_i < \infty$ für alle i und es gelte $\sum_i \frac{1}{p_i} = 1$. Dann gilt

$$\|f_1 \cdots f_k\|_{L^1} \le \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{L^{p_i}}$$

für $f_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Tipp. Induktion

Definition. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt eine *verallgemeinerte Treppenfunktion,* wenn ein $N \in \mathbb{N}$ und für $0 \le i < N$ reelle Zahlen $c_i \in \mathbb{R}$ und integrierbare Mengen $A_i \subset \mathbb{R}^n$ existieren, so dass

$$f = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \chi_{A_i}.$$

Übungsaufgabe 3. Zeige, dass die verallgemeinerten Treppenfunktionen für jedes p, $1 \le p \le \infty$ einen Untervektorraum von $\mathcal{L}^p$ bilden.

Übungsaufgabe 4. Sei $1 \le p < \infty$. Zeige, dass die verallgemeinerten Treppenfunktionen dicht in L^p liegen.

Bemerkung. Präzisere die Aussage zunächst! Im Beweis darf Hausaufgabe 23 benutzt werden.