9. ÜBUNG ZUR VORLESUNG
„ANALYSIS III“
IM SOMMERSEMESTER 2009

Tutoriumsaufgabe 30. Für Folgen (f_k) integrierbarer Funktionen $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und integrierbare Funktionen $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ betrachte die folgenden beiden Aussagen.

(i) $\lim_k f_k = g$ fast überall.
(ii) $\lim_k \|f_k - g\|_{L^\infty} = 0$.

Impliziert eine der beiden Aussagen immer die andere?

Tutoriumsaufgabe 31. Verallgemeinere den L^1-Fall von Übungsaufgabe 4 geeignet auf Funktionen mit Werten in einem endlich-dimensionalen Banachraum.

Hausaufgabe 25. Zeige den Fall $p = \infty$ von Satz B2.47 in folgender leicht verstärkter Form (siehe Bemerkung B2.48):

Sei $([f_k])$ eine Cauchyfolge in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann exisitiert eine Funktion $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass (f_k) in L^∞ und fast überall punktweise gegen f konvergiert.

Hausaufgabe 26. Es sei $M \subset \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Für $y \in \mathbb{R}^n$ setzen wir $M_y := \{x \in \mathbb{R}^m \colon (x, y) \in M\}$. Zeige, dass die Menge der $y \in \mathbb{R}^n$, für die die Aussage

$$M_y \text{ ist eine Nullmenge}$$

nicht gilt, eine Nullmenge ist.

Hausaufgabe 27. Es sei W ein endlich-dimensionaler Banachraum und $f\colon \mathbb{R}^n \to W$ eine integrierbare Funktion. Zeige, dass

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda \right\| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f\| \, d\lambda.$$

Tipp. Zeige die Aussage zunächst für verallgemeinerte Treppenfunktionen.

Abgabe: am 24. Juni vor der Übung.