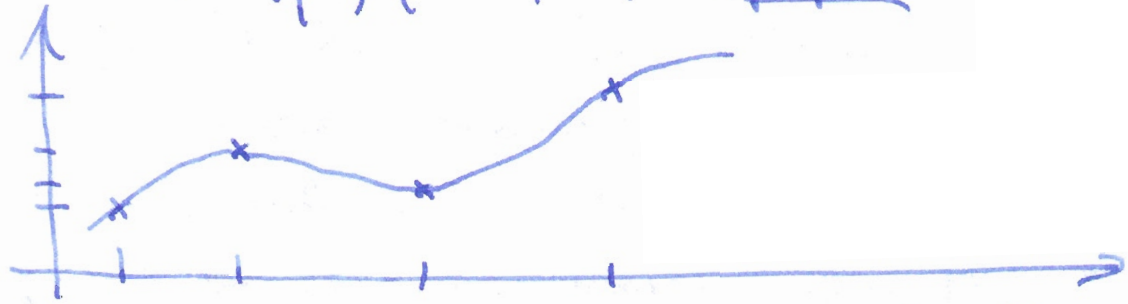
8. VL, Einf. in die Num. Mathematik, 11.5.09

3. Interpolation

Oft gibt es die Aufgabe, durch gegebene Punktepaare eine glatte Kurve zu legen, die analytisch leicht zu handhaben ist (differenzieren, integrieren), also (x_k, y_k), $k=0,\dots,N$ gegeben.



Gesucht: Glatte Funktion $P = P(x)$ mit

$$P(x_k) = y_k, \quad k=0,\dots,N$$

Mögliche Ansätze für P

i) Polynome

$$P = P(x; a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad N = n$$

ii) Rationale Funktionen

$$P(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{a_{n+1} + a_{n+2} x + \dots + a_{n+m+1} x^m}, \quad N = m$$

iii) Trigonometrische Polynome

$y_i \in \mathbb{C}$, $P(x) = a_0 + a_1 e^{ix} + a_2 e^{2ix} + \dots + a_n e^{nix}$
$= a_0 + a_1 e^{ix} + a_2 (e^{ix})^2 + \dots + a_n (e^{ix})^n$

iv) Splines (stückweise Polynome)

Ziel/Aufgabe der Interpolation

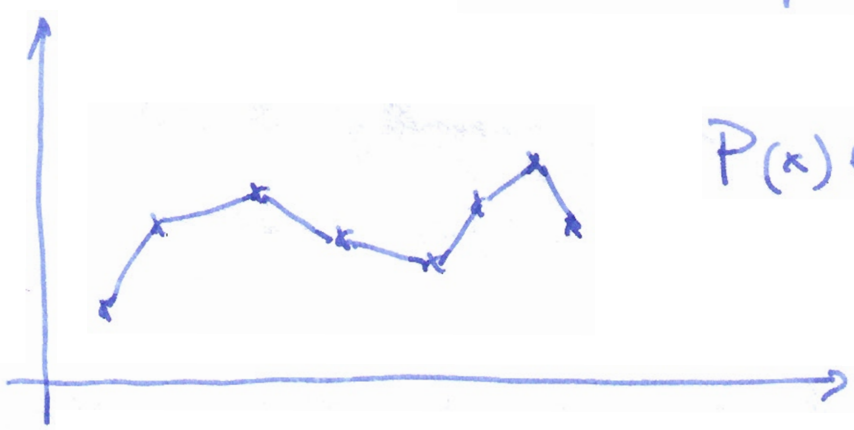
Bestimmung der Parameter $a_0, \dots, a_n$, so dass für $P = P(x; a_0, a_1, \dots, a_n)$ aus einer vorzugebenden Funktionenklasse die Beziehungen

$$P(x_k; a_0, a_1, \dots, a_n) = y_k \quad , k = 0, \dots, n \tag{3.1}$$

zu den vorgegebenen Stützstellen (x_k, y_k) erfüllt sind. (3.1) heißt auch Interpolationseigenschaft und die Stützstellen werden auch Knoten genannt. (3.1) sind $n+1$ Gleichungen für die $n+1$ Parameter $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Sehr einfach

lineare Splines



$P(x) \in C^0$

3.1 Polynominterpolation

Definition 3.1

Unter Π_n versteht man die Menge aller reellen Polynome $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $\leq$

Wir wissen,

- im Fall $n=1$ braucht man 2 Stützpunkte um eine Gerade (= Polynom 1. Grades) durchzulegen
- im Fall $n=2$ braucht man 3 Stützpunkte um eine Parabel (= Polynom 2. Grades) durchzulegen ...

Satz 3.2

Zu $n+1$ gegebenen Stützstellen (x_k, y_k), $k = 0, 1, \ldots, n$ mit der Eigenschaft $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, gibt es genau ein Polynom $P \in \Pi_n$ mit $P(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Beweis

Ansatz $\quad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (3.2)$

$P(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$

bedeutet

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0$$
$$\vdots \qquad\qquad \Longleftrightarrow$$
$$a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}_{\text{Vandermondesche Matrix } V} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (3.3)$$

V ist für paarweise verschiedene x_k regulär $\rightsquigarrow$ $a_0, a_1, \dots, a_n$ und damit p eindeutig bestimmt $\square$

Definition 3.3

Das nach Satz 3.2 eindeutig bestimmte Polynom p mit der Eigenschaft

$$p(x_k) = y_k \,, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

für die vorgegebenen Stützstellen (x_k, y_k) heißt <u>Interpolationspolynom</u>.

<u>Konstruktion des Interpolationspolynoms</u>

Wir erinnern an die Generalvoraussetzung

$$x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j \,, \quad i, j = 0, 1, \dots, n$$

Definition 3.4

Die Polynome $L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$ heißen (3.4)

Lagrange-Basispolynome.

Definition 3.5

Die Polynome $N_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$, $k = 1, \dots, n$
und $N_0(x) = 1$
heißen Newton-Basispolynome.

Satz 3.6

Die Monombasis

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

sowie die Lagrange-Basispolynome

$$\{L_k(x), k = 0, 1, \dots, n\}$$

und die Newton-Basispolynome

$$\{N_k(x), k = 0, 1, \dots, n\}$$

sind Basen (lin. unabh. Funktionensysteme) des Vektorraums der reellen Polynome Π_n vom Grad $\leq n$

Beweis

Als Übung empfohlen

Lagrange-Interpolation

Zuerst ist anzumerken, dass man das Interpolationspolynom nicht in der Form (3.2) auf der Grundlage der Lösung des Gleichungssystems (3.3) mit der Vandermondschen Matrix bestimmt, weil das viel zu aufwendig ist.

Besser geht es mit der Lagrange-Interpolation

Für $n=3$ haben wir z.B. die Basispolynome

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

und erkennen

$$L_0(x_0)=1, \; L_0(x_1)=L_0(x_2)=L_0(x_3)=0,$$

allgemein gilt

$$\boxed{L_k(x_j) = \delta_{kj}} \quad , \; k,j=0,1,\ldots,n \qquad (3.5)$$

Damit ergibt sich für das Interpolationspolynom

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x) \qquad (3.6)$$

,

da $P(x_k) = 0+0+\ldots+y_k \underbrace{L_k(x_k)}_{=1}+\ldots+0 = y_k$

gilt. (3.6) heißt Lagrangesches Interpolationspolynom

Newton-Interpolation

Bei der Lagrange-Interpolation haben wir das Interpolationspolynom in der Lagrange-Basis entwickelt.

Bei der Newton-Interpolation wird das eindeutig existierende Interpolationspolynom in der Newton-Basis entwickelt

Durch sukzessives Vorgehen erhalten wir durch Berücksichtigung der Stützstellen (x_k, y_k), $k = 0, 1, \dots, n$ die Koeffizienten der $N_k(x)$

$$p_n(x_0) = c_0 \qquad = y_0 \rightsquigarrow c_0$$

$$p_n(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) \qquad = y_1 \rightsquigarrow c_1$$

$$p_n(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \rightsquigarrow c_2$$

$$\vdots$$

$$p_n(x_n) = \sum_{k=0}^{n} c_k N_k(x_n) \qquad = y_n \rightarrow c_n$$

Definition 3.7

$p_n \in \Pi_n$, $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k N_k(x)$ heißt Newtonsches Interpolationspolynom

Bemerkung: c_n ist der Koeff. von x^n im Interpol.-Pol und c_k ist eindeutig festgelegt durch $\begin{matrix} x_0, \dots, x_k \\ y_0, \dots, y_k \end{matrix}$, d.h. durch die ersten k Stützstellen

Definition 3.8

Wir schreiben $c_k := f[x_0 x_1 \dots x_k]$ für die Abb. $\{(x_0,y_0),\dots,(x_k,y_k)\} \longmapsto c_k$

Betrachtet man Teilmengen der Stützstellen

$x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$,

dann bezeichnet man das Interpolationspolynom an diesen Stützstellen mit

$$P^*_{i_0 i_1 \dots i_k}(x)$$

wobei $i_0, i_1, \dots, i_k$ paarweise verschiedene Zahlen aus $\{0,\dots,k\}$ sind. Nach der Def. eines Interpolationspolynoms muss

$$P^*_{i_0 i_1 \dots i_k}(x_{i_j}) = y_{i_j} \qquad j=0,1,\dots,k$$

Damit gilt

$$P^*_k(x) \equiv y_k \qquad (3.7).$$

für das Polynom 0. Ordnung P^*_k (also $P^*_k(x) \neq P_k(x)$)

deutlich der * Polynom k-ter Ordnung

Hilfssatz 3.9

Es gilt f.a. $k \in \{1,2,\dots,n\}$

$$P^*_{i_0 i_1 \dots i_k}(x) = \frac{(x-x_{i_0})\,P^*_{i_1 \dots i_k}(x) - (x-x_{i_k})\,P^*_{i_0 \dots i_{k-1}}(x)}{(x_{i_k}-x_{i_0})} \qquad (3.8)$$

Beweis (Induktion)

Die beiden rechts stehenden Polynome in (3.8) haben einen Grad $\leq k-1$ (damit der gesamte Ausdruck einen Grad $\leq k$). Anfang ($k=1$) ist trivial wegen (3.7)

Es ist z.z., dass das rechts in (3.8) stehende Polynom das Interpolationspolynom zu den Stützstellen $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ ist (Ausdruck rechts von (3.8) bezeichnen wir mit $q(x)$)

Grad von $q(x) \leq k$ ist offensichtlich.
Weiter ist

$$q(x_{i_0}) = \frac{0 - (x_{i_0} - x_{i_k}) \overbrace{P^*_{i_0 \dots i_{k-1}}(x_{i_0})}^{= y_{i_0} \text{ (nach Vor.)}}}{(x_{i_k} - x_{i_0})} = y_{i_0}$$

und analog

$$q(x_{i_k}) = y_{i_k}$$

Schließlich für die restlichen Stützstellen $1 \leq j \leq k-1$

$$q(x_{i_j}) = \frac{(x_{i_j} - x_{i_0}) P^*_{i_1 \dots i_k}(x_{i_j}) - (x_{i_j} - x_{i_k}) P^*_{i_0 \dots i_{k-1}}(x_{i_j})}{(x_{i_k} - x_{i_0})}$$

$$= \frac{(x_{i_j} - x_{i_0}) y_{i_j} - (x_{i_j} - x_{i_k}) y_{i_j}}{x_{i_k} - x_{i_0}} = y_{i_j}$$

Damit erfüllt q die Interpolationsbedingung $q(x_{i_j}) = y_{i_j}$ $j = 0, \dots, k$, also genau das, was $P^*_{i_0 \dots i_k}(x)$ leistet. Aufgrund der Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms gilt

$$q = P^*_{i_0 \dots i_k}$$

$\square$

Satz 3.10 Es gilt

$$f[x_{i_0} \dots x_{i_k}] = \frac{f[x_{i_1} \dots x_{i_k}] - f[x_{i_0} \dots x_{i_{k-1}}]}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

Beweis Nach der Def von $f[\dots]$ ist dies gerade der Koeff. vor der höchsten Potenz des Interpolationspol. Betrachte (3.8). Das Pol. links hat in der höchsten Potenz den Term $f[x_{i_0} \dots x_{i_k}] x^k$, das rechts stehende hat in der höchsten Potenz stehen

$$\frac{x \cdot f[x_{i_1} \dots x_{i_k}] x^{k-1} - x f[x_{i_0} \dots x_{i_{k-1}}] x^{k-1}}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

$\rightsquigarrow$ Behauptung $\square$

Als Folgerung des Satzes 3.10 findet man das folgende Schema

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
x_0	$y_0 = f[x_0]$			
		$f[x_0 x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$y_1 = f[x_1]$		$f[x_0 x_1 x_2] = \frac{f[x_1 x_2]-f[x_0 x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1 x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0 x_1 x_2 x_3]$
x_2	$y_2 = f[x_2]$		$f[x_1 x_2 x_3] = \frac{f[x_2 x_3]-f[x_1 x_2]}{x_3-x_1}$	
x_3	$y_3 = f[3]$	$f[x_2 x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		...
$\vdots$				

Schema wird "Schema der dividierten Differenzen" genannt

daraus liest man das Newtonsche Interpol-Polynom ab

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0 x_1](x-x_0) + f[x_0 x_1 x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+ f[x_0 x_1 x_2 x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Beispiel

$x_0 = 0$	$1 = f[x_0]$		
		$f[x_0 x_1] = 2$	
$x_1 = 1$	$3 = f[x_1]$		$f[x_0 x_1 x_2] = \frac{2-1}{3-0} = \frac{1}{3}$
$x_2 = 3$	$5 = f[x_2]$	$f[x_1 x_2] = \frac{5-3}{3-1} = 1$	

$$\rightsquigarrow P_3(x) = 1 + 2(x-0) + \frac{1}{3}(x-0)(x-1)$$