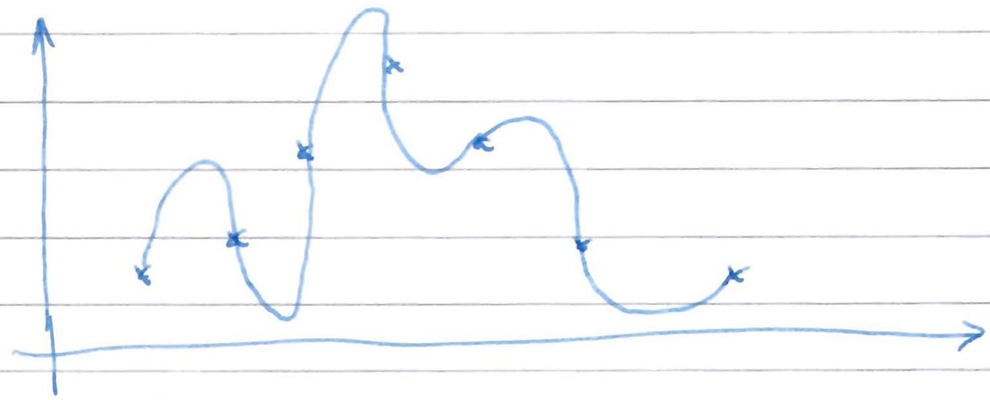
10. VL Einf. in die Num. Math, 18.5.09

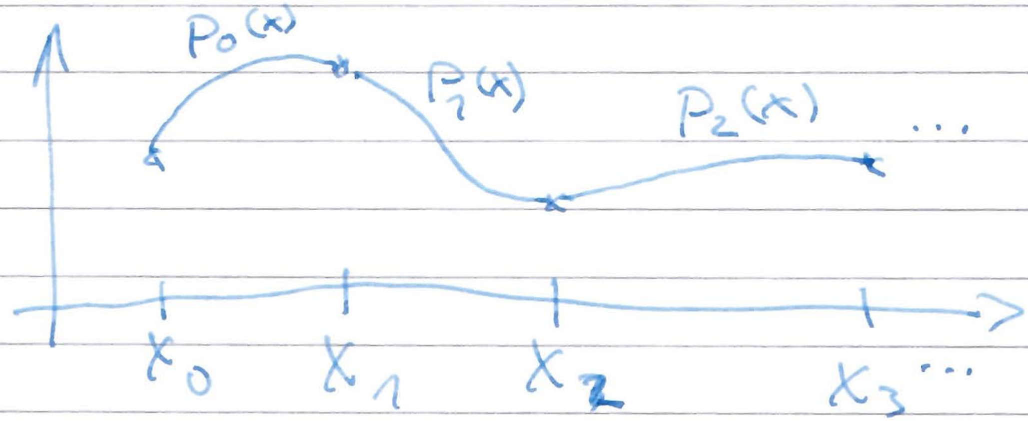
Spline-Interpolation

Problem bei der Polynom-Interpolation:
Evtl. große Oszillationen durch Polynome höheren Grades bei Stützpunkt-Zahlen ≥ 10



Deshalb:

statt eines Interpolationspolynoms konstruiert man für (x_k, y_k), $k = 0, 1, \dots, n$ in jedem Teilintervall einzelne Polynome, die an den Nahtstellen glatt ineinander übergehen, z.B.



Betrachten mit

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b\}$$

eine festgewählte Zerlegung des Intervalls $[a,b]$, wobei die Stützstellen $x_0, \ldots, x_N$ auch als Knoten bezeichnet werden.

Definition 3.15
Eine Splinefunktion der Ordnung $l \in \mathbb{N}$ zur Zerlegung Δ (zu den Knoten $x_0, \ldots, x_N$) ist eine Funktion $s \in C^{l-1}[a,b]$, die auf jedem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ mit einem Polynom l-ten Grades übereinstimmt. Der Raum der Splinefunktionen wird mit $S_{\Delta,l}$ bezeichnet, es gilt also

$$S_{\Delta,l} = \{ s \in C^{l-1}[a,b] : s|_{[x_{k-1},x_k]} = p_k|_{[x_{k-1},x_k]}$$
$$\text{für ein } p_k \in \Pi_l \ (k = 1, \ldots, N) \}$$

Anstelle Splinefunktion verwendet man auch einfach Spline.

$\rightarrow$ $l = 1$ lineare Splines

$l = 3$ kubische Splines !!!

$l = 2$ quadratische Splines

Da wir vorgebene Wertetabellen interpolieren wollen, geht es im Folgenden um die Berechnung interpolierender Splinefunktionen, also Splines mit der Eigenschaft

$$s(x_k) = f_k \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, N \tag{3.17}$$

für (x_k, f_k), $k = 0, 1, \dots, N$.

Interpolierende lineare Splines $s \in S_{\Delta,1}$

→ offensichtlich

$$s(x) = a_k + b_k(x - x_k), \quad x \in [x_k, x_{k+1}],$$

aus $s_k(x_k) = f_k$ und $s_k(x_{k+1}) = f_{k+1}$ folgt

$$a_k = f_k, \quad b_k = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k}$$

$k = 0, \dots, N-1$

Satz 3.16

a) Zur Zerlegung $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$ und $f_0, \dots, f_N \in \mathbb{R}$ gibt es genau einen Spline $s \in S_{\Delta,1}$ mit der Eigenschaft (3.17)

b) Zu einer Funktion $f \in C^2[a,b]$ sei $s \in S_{\Delta,1}$ der zugehörige interpolierende lineare Spline. Dann gilt

$$\|s - f\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|f''\|_\infty h_{max}^2,$$

mit $h_{max} := \max_{k=0,\dots,N-1} (x_{k+1} - x_k)$.

Beweis

a) wurde durch Konstruktion gezeigt

b) Für jedes $k \in \{1, \dots, N\}$ stimmt S auf $[x_{k-1}, x_k]$ mit demjenigen $P \in \Pi_1$ überein, für das $P(x_{k-1}) = f(x_{k-1})$ und $P(x_k) = f(x_k)$ gilt.

Der Fehler bei der Pol.-Interpol. (Satz 3.13) liefert

$$|S(x) - f(x)| \leq \frac{(x - x_{k-1})(x_k - x)}{2} \max_{\xi \in [x_{k-1}, x_k]} |f''(\xi)|$$

$$\leq \frac{1}{8} h_{max}^2 \, \|f''\|_\infty \quad , \quad x \in [x_{k-1}, x_k]$$

□

Kubische Splinefunktionen

Betrachten nun $S_{\Delta,3}$, und verwenden

$$\|u\|_2 := \left(\int_a^b |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad , \quad u \in C[a,b].$$

Hilfssatz 3.17

Wenn eine Funktion $f \in C^2[a,b]$ und eine kubische Splinefkt. $S \in S_{\Delta,3}$ in den Knoten übereinstimmen, d.h.

$$S(x_k) = f(x_k) \qquad \text{für } k = 0, \dots, N,$$

So gilt
$$\|f'' - S''\|_2^2 = \|f''\|_2^2 - \|S''\|_2^2 - 2\left([f' - S']S''\right)(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \qquad (3.18)$$

Beweis

$$\|f'' - S''\|_2^2 = \int_a^b |f''(x) - S''(x)|^2 dx = \|f''\|_2^2 - 2\int_a^b (f''S'')(x)\,dx + \|S''\|_2^2$$

$$= \|f''\|_2^2 - 2\int_a^b \left([f'' - S'']S''\right)(x)\,dx - \|S''\|_2^2$$

Für den unterstrichenen Ausdruck $(k=1,\dots,N)$ ergibt die part. Integration

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \left([f''-s'']s''\right)(x)\,dx$$

$$= \left([f'-s']s''\right)(x)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left([f'-s']s'''\right)(x)\,dx$$

$$= \quad -\,\text{"}\,- \quad \underbrace{-\left([f-s]s'''\right)(x)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k}}_{\substack{=0 \\ \text{wegen Interpol.-} \\ \text{Eigenschaft}}} + \underbrace{\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left([f-s]s^{(4)}\right)(x)\,dx}_{\substack{=0 \\ \text{wegen } s^{(4)}=0}}$$

Die Summation über $k=1,\dots,N$ ergibt

$$\int_a^b \left([f''-s'']s''\right)(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N}\left\{\left([f'-s']s''\right)(x_k) - \left([f'-s']s''\right)(x_{k-1})\right\}$$

$$= \left([f'-s']s''\right)(b) - \left([f'-s']s''\right)(a).$$

$\square$

Satz 3.12 Geg. sei $f \in C^2[a,b]$ und ein kubischer Spline $s \in S_{\Delta,3}$ mit $s(x_k) = f(x_k)$, $k=0,\dots,N$.

Dann gilt die Identität (3.19)

$$\|f''\|_2^2 - \|s''\|_2^2 = \|f''-s''\|_2^2,$$

sofern eine der 3 folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) $s''(a) = s''(b) = 0$;

b) $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$;

c) $f'(a) = f'(b)$, $s'(a) = s'(b)$, $s''(a) = s''(b)$.

Beweis

Die Aussage des Satzes ergibt sich durch Berücksichtigung von a), b) bzw. c) in der Identität (3.18)

$\square$

Folgerung 3.20

Zu gegebenen Werten $f_0, \dots, f_N \in \mathbb{R}$ hat ein interpolierender kubischer Spline $s \in S_{\Delta,3}$ mit $s''(a) = s''(b) = 0$ unter allen hinreichend glatten interpolierenden Funktionen die geringste Krümmung, es gilt also

$$\|s''\|_2 \le \|f''\|_2$$

für jede Funktion $f \in C^2[a,b]$ mit $f(x_k) = f_k$ für $k = 0, \dots, N$.

Beweis

Folgt direkt aus (3.19). $\square$

Berechnung interpolierender kubischer Splines

lokaler Ansatz

$$s(x) = a_k + b_k(x-x_k) + c_k(x-x_k)^2 + d_k(x-x_k)^3$$
$$\text{für } x \in [x_k, x_{k+1}],\ k = 0, 1, \dots, N-1 \qquad (3.20)$$

für $s: [a,b] \to \mathbb{R}$.

Aufgabe: Bestimmung von a_k, b_k, c_k, d_k, $k = 0, 1, \dots, N-1$ so, dass s auf $[a,b]$ zweimal stetig diff'bar ist und darüberhinaus in den Knoten vorgegebene Werte $f_0, \dots, f_N \in \mathbb{R}$ interpoliert

$$s(x_k) = f_k \qquad \text{für } k = 0, \dots, N.$$

Setzen $h_k := x_{k+1} - x_k$, $k = 0, \dots, N$

Hilfssatz 3.21

Falls N+1 reelle Zahlen $s_0'', \dots, s_N'' \in \mathbb{R}$ den folgenden N-1 gekoppelten Gleichungen $(k=1,\dots,N-1)$

$$h_{k-1} \underbrace{s_{k-1}''}_{M_{k-1}} + 2(h_{k-1}+h_k) \underbrace{s_k''}_{M_k} + h_k \underbrace{s_{k+1}''}_{M_{k+1}} = \underbrace{6\frac{f_{k+1}-f_k}{h_k} - 6\frac{f_k-f_{k-1}}{h_{k-1}}}_{=:g_k} \qquad (3.21)$$

genügen, so liefert der lokale Ansatz (3.20) mit den Setzungen

$$c_k = \frac{M_k}{2} \qquad a_k = f_k \qquad d_k = \frac{M_{k+1}-M_k}{6h_k}$$

$$b_k = \frac{f_{k+1}-f_k}{h_k} - \frac{h_k}{6}(M_{k+1}+2M_k)$$

für $k=0,\dots,N-1$ eine kubische Splinefkt. $s \in S_{\Delta,3}$, die die Interpol.-Bed. $s(x_k)=f_k$ erfüllt.

Beweis

Vorlesung oder Plato, Bärwolff $\square$

Bemerkung

Die Momente $M_0,\dots,M_N$ stimmen mit den 2. Ableitungen der Splinefkt. s in den Knoten x_k überein

$$s_k''(=M_k) = s''(x_k) \qquad k=0,\dots,N$$

(3.21) bedeutet: Es liegen N-1 Bedingungen für N+1 Momente vor, d.h. es gibt 2 Freiheitsgrade. Diese werden durch die folgenden Randbedingungen festgelegt:

Natürliche RB $\quad s_0'' = s_N'' = 0$

Vollständige RB $\quad s_0' = f_0' \,,\; s_N' = f_N'$ für geg. $f_0', f_N' \in \mathbb{R}$

periodische RB $\quad s_0' = s_N' \,,\; s_0'' = s_N''$

(diese Festlegungen korrelieren mit den Bedingungen a), b), c) des Satzes 3.18).

Gestalt der Gleichungssysteme

Nat. RB.

$$\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & h_{N-2} \\ 0 & & & h_{N-2} & 2(h_{N-2}+h_{N-1}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{N-1} \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

vollst. RB

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & & & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & h_{N-2} & 2(h_{N-2}+h_{N-1}) & h_{N-1} \\ 0 & & & h_{N-1} & 2h_{N-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

period. RB

$$\begin{bmatrix} 2(h_{N-1}+h_0) & h_0 & 0 & \cdots & 0 & h_{N-1} \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & & h_{N-2} \\ h_{N-1} & 0 & \cdots & 0 & h_{N-2} & 2(h_{N-2}+h_{N-1}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{N-1} \end{pmatrix}$$