12. VL Einf. in die Num. Mathematik, 25.5.09 (1)

Trigonometrische Interpolation

Werden periodische Vorgänge "gemessen" oder vermutet man, dass gegebene Stützpunkte zu einer periodischen Funktion gehören, dann bietet sich eine Interpolation durch trigonometrische Funktionen an.

O.B.d.A. nehmen wir als Periode $T = 2\pi$ an und betrachten das Intervall $[0, 2\pi]$ (bei anderen Periodenlängen Transformation auf das Intervall $[0, 2\pi]$ und die Periode 2π).

Zerlegung:

$$\Delta = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < 2\pi\}$$

mit $x_k = \frac{k}{n} 2\pi$, $k = 0, \dots, n-1$

Es wird folgender trigonometrischer Ansatz gemacht

$$\psi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{l=1}^{m} (A_l \cos lx + B_l \sin lx) \quad (3.36)$$

falls $n = 2m+1$ ungerade

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{l=1}^{m-1} (A_l \cos lx + B_l \sin lx) + \frac{A_m}{2} \cos mx$$

falls $n = 2m$ gerade.

Für die Funktion $\psi(x)$ soll die Interpolationsbedingung

$$\psi(x_k) = f_k \qquad k = 0, \dots, n-1 \qquad (3.37)$$

mit gegebenen Werten $f_k \in \mathbb{R}$ erfüllen, wobei die Koeffizienten A_ℓ $(\ell = 0, \dots, n)$, B_ℓ $(\ell = 1, \dots n-1/n)$ gesucht sind.

Man kann zwar A_ℓ, B_ℓ aus (3.36) durch Auswertung von (3.37) bestimmen, aber im Komplexen wird es übersichtlicher. Mit

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

folgt nämlich

$$\cos \ell x_k = \frac{1}{2}\left(e^{i\ell x_k} + e^{-i\ell x_k}\right) \qquad , x_k = \frac{k 2\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(e^{i\frac{2\pi\ell}{n}}\right)^k + \left(e^{-i\frac{2\pi\ell}{n}}\right)^k\right) \qquad (3.38)$$

bzw.

$$\sin \ell x_k = \frac{1}{2i}\left(\left(e^{i\frac{2\pi\ell}{n}}\right)^k - \left(e^{-i\frac{2\pi\ell}{n}}\right)^k\right).$$

Bemerkung

Wegen der 2π-Periodizität von $e^{i\varphi}$ gilt

$$e^{-\frac{2\pi\ell}{n}i} = e^{\left(-\frac{2\pi\ell}{n} + 2\pi\right)i} = e^{\left(-\frac{2\pi\ell}{n} + \frac{2\pi n}{n}\right)i}$$

$$= e^{\frac{(n-\ell)2\pi}{n}i}$$

d.h. $e^{-i\ell x_k} = e^{(n-\ell)ix_k}$ $\rightsquigarrow$ keine neg. Potenzen, sondern nur Terme

$$e^{\ell i x_k}, \quad \ell = 0, \dots, n-1$$

(3.38) wird in den Ansatz (3.36) eingesetzt, etwas umgeordnet, so dass man mit

$$p(x) = \beta_0 + \beta_1 e^{ix} + \beta_2 e^{i2x} + \dots + \beta_{n-1} e^{i(n-1)x} \quad (3.39)$$

ein trigonometrisches Polynom erhält mit der Eigenschaft (Interpol.-Bedingung)

$$\psi(x_k) = f_k \Longleftrightarrow p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

wobei $\psi(x) = p(x)$ nicht gilt.

Für die Beziehungen zwischen β_k und A_k, B_k ergeben sich einfache Formeln, z.B. für $n = 2m+1$

$$\beta_0 = \frac{A_0}{2}, \quad \beta_j = \frac{1}{2}(A_j - iB_j), \quad \beta_{n-j} = \frac{1}{2}(A_j + iB_j)$$

$$j = 1, \dots, m$$

$$A_0 = 2\beta_0, \quad A_\ell = \beta_\ell + \beta_{n-\ell}, \quad B_\ell = i(\beta_\ell - \beta_{n-\ell})$$

$$\ell = 1, \dots, m.$$

Setzt man $\omega = e^{ix}$, so folgt

$$p(x) = \beta_0 \omega^0 + \beta_1 \omega^1 + \dots + \beta_{n-1} \omega^{n-1} =: P(\omega) \quad (3.40)$$

und P ist tatsächlich ein Polynom in ω.

Definition 3.27

$$\omega := e^{ix}, \quad \omega_k := e^{ix_k} \left(= e^{i\frac{k2\pi}{n}}\right).$$

Bemerkung: Wir haben oben $f_k \in \mathbb{R}$ gefordert, darauf kann auch verzichten und f_k auch aus $\mathbb{C}$ vorgeben.

Satz 3.28

Zu beliebigen Stützstellen (x_k, f_k), $k=0,\dots,n-1$, $f_k \in \mathbb{C}$, $x_k = k\frac{2\pi}{n}$ gibt es genau ein trigonometrisches Polynom der Form (3.40) mit

$$P(x_k) = f_k \quad (\text{bzw. } P(\omega_k) = f_k), \; k=0,\dots,n-1.$$

Dabei gelten die wichtigen Beziehungen

(i) $\omega_k^j = \omega_j^k$, $\omega_k^{-l} = \overline{\omega_k^l}$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^j \omega_k^{-l} = \begin{cases} n & j=l \\ 0 & j \neq l, \; 0 \leq l, j \leq n-1 \end{cases}$

Beweis

Die Existenz des Polynoms und die Eindeutigkeit folgt analog dem Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit der allg. reellen Polynominterpolation (z.B. Lagrange-Interpol.)

Zu (i) nach Def. gilt

$$\omega_k^j = \left(e^{\frac{2k\pi}{n} i}\right)^j = \left(e^{\frac{2j\pi}{n} i}\right)^k = \omega_j^k$$

$\omega_k^{-l} = \overline{\omega_k^l}$ folgt aus $e^{-il} = \overline{(e^{il})}$

Zu (ii) Gilt $j = l \rightsquigarrow$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\omega_k^j \omega_k^{-l}}_{=1} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n,$$

Weiterhin ist $\omega_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i}$ eine der n-ten Einheitswurzeln und damit

$$(\omega_k)^n - 1 = 0$$, Ausklammern von $(\omega_k - 1)$

ergibt $$(\omega_k-1)(\omega_k^{n-1}+\omega_k^{n-1}+\ldots+1)=0 \quad . \qquad (3.41)$$

Man findet nun
$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k^j\omega_k^{-l}=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k^{j-l}\underset{(i)}{=}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_{j-l}^k=\sum_{k=0}^{n-1}(\omega_{j-l})^k$$
und da $j\neq l$ ist, ist $\omega_{j-l}\neq 1$, d.h. $\sum_{k=0}^{n-1}(\omega_{j-l})^k$ muss als 2. Faktor der linken Seite von (3.41) $=0$ sein. $\square$

Aus dem eben bewiesenen Satz ergibt sich die

Folgerung

Die komplexen Vektoren
$$\vec{\phi}_j=\begin{pmatrix}\omega_0^j\\ \vdots\\ \omega_{n-1}^j\end{pmatrix},\ \vec{\phi}_l=\begin{pmatrix}\omega_0^l\\ \vdots\\ \omega_{n-1}^l\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n,\ (\vec{\phi}_j)_k=\omega_k^j,$$
bezüglich des Skalarproduktes
$$\langle f,g\rangle:=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f_k\bar{g}_k \qquad (3.42)$$
zueinander orthogonal, d.h.
$\{\vec{\phi}_0,\ldots,\vec{\phi}_{n-1}\}$ ist Orthonormalsystem im $\mathbb{C}^n$.

Definition 3.29

Die Koeffizienten $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}$ aus (3.40), d.h. die Koeff. von $P(\omega)$ heißen <u>Fourierkoeffizienten</u> oder <u>diskrete Fouriertransformierte</u> von $f_0,\ldots,f_{n-1}$, falls $P(\omega_k)=f_k$, $k=0,\ldots,n-1$, gilt.

Satz 3.30

Für die diskreten Fouriertransformierten β_j von f_j, $j=0,\dots,n-1$ gilt

$$\beta_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i\frac{jk2\pi}{n}} \qquad (3.43)$$

d.h. sie sind eindeutig bestimmt

Beweis

Die Interpolationsbedingungen $P(\omega_k)=f_k$ bedeuten

$$P(\omega_0)=\beta_0\omega_0^0+\beta_1\omega_0^1+\dots+\beta_{n-1}\omega_0^{n-1}=f_0$$

$$\vdots$$

$$P(\omega_{n-1})=\beta_0\omega_{n-1}^0+\beta_1\omega_{n-1}^1+\dots+\beta_{n-1}\omega_{n-1}^{n-1}=f_{n-1}$$

$$\rightarrow \quad \beta_0\vec{\phi}_0+\beta_1\vec{\phi}_1+\dots+\beta_{n-1}\vec{\phi}_{n-1}=\vec{f}:=\begin{pmatrix} f_0\\ \vdots \\ f_{n-1}\end{pmatrix}$$

Die Skalarmultiplikation mit $\vec{\phi}_j$ ergibt aufgrund der Orthogonalität

$$\beta_j\underbrace{\langle\vec{\phi}_j,\vec{\phi}_j\rangle}_{=1}=\langle\vec{f},\vec{\phi}_j\rangle=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k\overline{\omega_k^j}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k\omega_k^{-j}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i\frac{2kj\pi}{n}}$$

$\square$

Bemerkung

Für die Fourierkoeff. oder diskreten Fouriertransformierten β_k von f_k wird auch die Notation

$$\mathcal{F}[f_0,\dots,f_{n-1}]:=[\beta_0,\dots,\beta_{n-1}] \qquad (3.44)$$

verwendet

(3.44) bedeutet das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_0^1 & \dots & \omega_0^{n-1} \\ \vdots & & & \\ \omega_{n-1}^0 & \omega_{n-1}^1 & \dots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}}_{=:\, V = (\omega_k^j)_{j,k=0,\dots,n-1}} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (3.45)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{n} \begin{pmatrix} \omega_0^{-0} & \omega_0^{-1} & \dots & \omega_0^{-(n-1)} \\ \vdots & & & \\ \omega_{n-1}^{-0} & \omega_{n-1}^{-1} & \dots & \omega_{n-1}^{-(n-1)} \end{pmatrix}}_{= \frac{1}{n}\overline{V} = \left(\frac{1}{n}\omega_k^{-j}\right)_{j,k=0,\dots,n-1}} \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (3.46)$$

Folgerung

a) Es gilt offensichtlich

$$\left(\frac{1}{n}\overline{V}\right)^{-1} = V$$

und jeder Datensatz $f_0, \dots, f_{n-1} \in \mathbb{C}$ lässt sich aus seiner diskreten Fouriertransformierten

$$\mathcal{F}[f_0, \dots, f_{n-1}] = [\beta_0, \dots, \beta_{n-1}]$$

durch (siehe (3.44))

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k e^{i\frac{jk2\pi}{n}}, \quad j = 0, \dots, n-1$$

zurückgewinnen. Es wird auch die Notation

$$\mathcal{F}^{-1}[\beta_0, \dots, \beta_{n-1}] = [f_0, \dots, f_{n-1}]$$ verwendet

b) Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f_k|^2$$ (Beweis als Übung!)

Beziehungen zwischen der reellen und komplexen Fourierkoeffizienten A_j, B_j, β_j

Es galt $f_k = \Psi(x_k)$ und außerdem war

$\omega_k = e^{-ix_k}$ definiert

Für ungerades $n = 2m+1$ folgt

$$\Psi(x_k) = \frac{A_0}{2} + \sum_{\ell=1}^{m} \left(A_\ell \frac{1}{2}(\omega_k^{\ell} + \omega_k^{-\ell}) + B_\ell \frac{1}{2i}(\omega_k^{\ell} - \omega_k^{-\ell}) \right)$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{\ell=1}^{m} \left(A_\ell \frac{1}{2}(\omega_k^{\ell} + \omega_k^{n-\ell}) + B_\ell \frac{1}{2i}(\omega_k^{\ell} - \omega_k^{n-\ell}) \right)$$

$$= \beta_0 + \beta_1 \omega_k + \beta_2 \omega_k^2 + \dots + \beta_{n-1} \omega_k^{n-1}.$$

Daraus folgt

$$A_0 = 2\beta_0 \iff \beta_0 = \frac{A_0}{2}$$

sowie

$$\beta_\ell = \frac{1}{2}\left(A_\ell + \frac{1}{i} B_\ell\right) = \frac{1}{2}\left(A_\ell - iB_\ell\right), \quad \ell = 1, \dots, m$$

$$\beta_{n-\ell} = \frac{1}{2}\left(A_\ell - \frac{1}{i} B_\ell\right) = \frac{1}{2}\left(A_\ell + iB_\ell\right), \quad \ell = 1, \dots, m$$

$$\rightsquigarrow \quad A_\ell = \beta_\ell + \beta_{n-\ell}, \quad B_\ell = i(\beta_\ell - \beta_{n-\ell}), \quad \ell = 1, \dots, m$$

Mit der Formel (3.43) folgt

$$A_\ell = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \Big(e^{-ik\ell\frac{2\pi}{n}} + \underbrace{e^{-ik(n-\ell)\frac{2\pi}{n}}}_{= e^{ik\ell\frac{2\pi}{n}}} \Big)$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \frac{1}{2} \left(e^{-ik\ell\frac{2\pi}{n}} + e^{ik\ell\frac{2\pi}{n}} \right) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cos(\ell x_k)$$

und analog

$$B_\ell = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \sin(\ell x_k)$$

(3.42)

Die Betrachtungen für gerades $n = 2m$ verlaufen analog.

Zusammengefasst ergibt sich

Satz 3.31

Werden die Koeffizienten A_ℓ, B_ℓ gemäß (3.87) bestimmt, so erfüllt

$$\Psi(x) = \begin{cases} \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (A_k \cos kx + B_k \sin kx), & n = 2m+1 \\ \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) + \frac{A_m}{2} \cos mx, & n = 2m \end{cases}$$

Interpolationsbedingung

$$\Psi(x_k) = f_k \quad , \quad k = 0, \dots, n-1$$

für reelle f_k.