6. Numerische Lösung von Anfangswertaufgaben

Anwendungen wie Flugbahnberechnungen, Schwingungsberechnungen oder die Dynamik von Räuber-Beute-Modellen führen auf Anfangswertprobleme für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

<u>Definition 6.1</u>

Ein <u>Anfangswertproblem</u> für ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung ist von der Form

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(t, \vec{y}), \quad t \in [a, b], \qquad (6.1)$$

$$\vec{y}(a) = \vec{y}_0 \qquad (6.2)$$

mit einem gegebenen endl. Intervall $[a,b]$, einem Vektor $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ und einer Abb.

$$\vec{f} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad (6.3)$$

wobei eine differenzierbare Abb. $\vec{y} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften (6.1) - (6.3) als <u>Lösung des Anfangswertproblems</u> gemeint ist.

Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung liefert

<u>Satz 6.2</u>

Erfüllt $\vec{f}$ aus (6.3) die Bedingung (6.4)

$$\|\vec{f}(t,\vec{u}) - \vec{f}(t,\vec{v})\| \le L \,\|\vec{u} - \vec{v}\|, \quad t \in [a,b], \ \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

mit einer Konstanten $L > 0$ in einer beliebigen Vektornorm $\|\cdot\|$ des $\mathbb{R}^n$, dann gelten die Aussagen:

a) Das AWP (6.1), (6.2) besitzt genau eine stetig diff'bare Lösung $\vec{y} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (Picard-Lindelöff).

b) Für diff'bare Funktionen $\vec{y}, \hat{\vec{y}} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(t,\vec{y}),\ t \in [a,b] \quad ; \quad \vec{y}(a) = \vec{y}_0$$
$$\hat{\vec{y}}\,' = \vec{f}(t,\hat{\vec{y}}),\ t \in [a,b] \quad ; \quad \hat{\vec{y}}(a) = \hat{\vec{y}}_0$$

gilt die Abschätzung

$$\|\vec{y}(t) - \hat{\vec{y}}(t)\| \le e^{L(t-a)} \|\vec{y}_0 - \hat{\vec{y}}_0\|,\ t \in [a,b]. \tag{6.5}$$

Bemerkung

1) Mit den Aussagen des Satzes 6.2 hat man die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung und ~~die~~ stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsdaten unter der Voraussetzung der Lipschitzstetigkeit von $\vec{f}(t,\cdot)$ vorliegen.

2) Zum Beweis des Satzes sei auf Lehrveranstaltungen zu Differentialgleichungen bzw. zur Analysis verwiesen.

3) Im Folgenden sollen numerische Lösungsverfahren entwickelt werden, wobei wir ohne die Allgemeinheit einzuschränken den Fall $n=1$ betrachten. Die besprochenen

Verfahren gelten allerdings auch im allg. Fall $n>1$!

Definition 6.3

Unter dem Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = f(t,y)$$

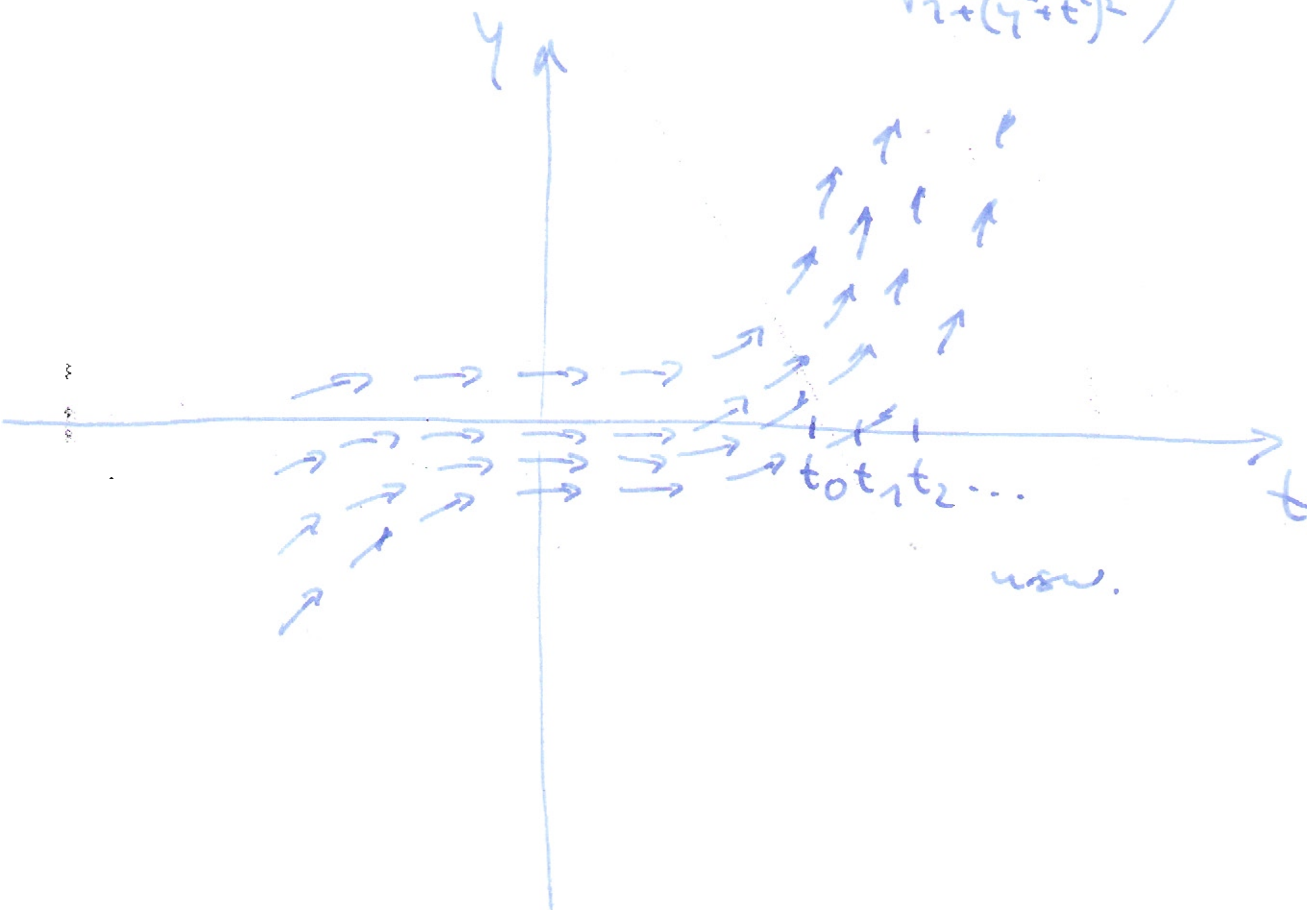
versteht man das Vektorfeld

$$\vec{r}(t,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+f^2(t,y)}} \\[2ex] \dfrac{f(t,y)}{\sqrt{1+f^2(t,y)}} \end{pmatrix},$$

d.h. das Vektorfeld der normierten Steigungen.

Beispiel

$$y' = y^2+t^2 \qquad \vec{r}(t,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+(y^2+t^2)^2}} \\[2ex] \dfrac{y^2+t^2}{\sqrt{1+(y^2+t^2)^2}} \end{pmatrix}$$



Betrachtet man nun einen beliebigen Punkt (t_0, y_0) der (t,y)-Ebene, kann man Lösungskurven $y(t)$ durch diesen Punkt annähern:

I) $y'(t_0) = y_0^2 + t_0^2$, ($t_0 = a$ entspricht Start im Anfangspunkt (a, y_0))

t-Achse wird durch $t_k = t_0 + kh$ äquidistant unterteilt,

II) mit dem Schritt vom Punkt

(t_0, y_0) zu $(t_0 + h, y_0 + h y'(t_0)) =: (t_1, y_1)$

bzw. allgemein vom Punkt

(t_k, y_k) zu $(t_k + h, y_k + h f(t_k, y_k)) = (t_{k+1}, y_{k+1})$

erhält man mit $h = (b-a)/N$ nach n Schritten mit

$y_0, y_1, \ldots, y_N$

unter „günstigen" Umständen eine Approximation der Lösung $y(t)$ an den Stellen

$a = t_0, t_1, \ldots, t_N = b$.

III) D.h. man fährt das Richtungsfeld geeignet ab, um eine numerische Lösung y_k, $k = 0, 1, \ldots, N$ zu erhalten.

Theorie der Einschrittverfahren

Definition 6.4

Ein Einschrittverfahren zur näherungsweisen Bestimmung einer Lösung des Anfangswertproblems (6.1), (6.2) hat die Form

$$y_{k+1} = y_k + h_k \Phi(t_k, y_k, y_{k+1}, h_k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad (6.6)$$
$$y_0 = y_0$$

mit einer Verfahrensfunktion
$\Phi : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ und einem (noch nicht näher spezifizierten) Gitter bzw. Schrittweiten

$$\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b\}, \; h_k := t_{k+1} - t_k, \quad k = 0, \ldots, N-1. \qquad (6.7)$$

Bemerkung

Hängt die Verfahrensfunktion <u>nicht</u> von y_{k+1} ab, ist die Berechnungsvorschrift (6.6) eine explizite Formel zur Berechnung von y_{k+1} und man spricht von einem expliziten Einschrittverfahren.

Zur Klassifizierung und Bewertung von numerischen Lösungsverfahren für AWP benötigen wir im Folgenden einige Begriffe ($y(t)$ bezeichnet hier die exakte Lösung).

Definition 6.5

Unter dem <u>lokalen Diskretisierungsfehler</u> an der Stelle t_{k+1} des Verfahrens (6.6) versteht man den Wert

$$d_{k+1} := y(t_{k+1}) - y(t_k) - h_k \Phi(t_k, y(t_k), y(t_{k+1}), h_k) \qquad (6.8)$$

Definition 6.6

Unter dem globalen Diskretisierungsfehler g_k an der Stelle t_k versteht man den Wert

$$g_k := y(t_k) - y_k .$$

Definition 6.7

Ein Einschrittverfahren (6.6) besitzt die Fehlerordnung p, falls für seinen lokalen Diskretisierungsfehler d_k die Abschätzungen

$$|d_k| \le \text{const.}\, h_k^{p+1}, \quad k=1,\dots,N,$$

$$\max_{1\le k\le N} |d_k| \le D = \text{const.}\, h_{max}^{p+1} = O(h_{max}^{p+1}) \quad (6.9)$$

mit $h_{max} = \max\limits_{k=0\dots N-1} t_{k+1}-t_k$ gilt. (statt Fehlerordnung verwendet man auch den Begriff Konsistenzordnung)

Ist $p \ge 1$, dann heißt das Verfahren konsistent.

Die Bedingungen

$$\begin{aligned} |\phi(t,u_1,u_2,h) - \phi(t,v_1,u_2,h)| &\le L_1 |u_1 - v_1| \\ |\phi(t,u_1,u_2,h) - \phi(t,u_1,v_2,h)| &\le L_2 |u_2 - v_2| \end{aligned} \quad (6.10)$$

für $t \in [a,b]$, $0 < h \le b-t$, $u_j, v_j \in \mathbb{R}$, mit positiven Konstanten L_1, L_2 sind für die folgenden Konvergenzuntersuchungen von Einschrittverfahren von Bedeutung.

Satz 6.8

Ein Einschrittverfahren (6.6) zur Lösung des AWP (6.1), (6.2) besitze die Konsistenzordnung $p \ge 1$ und die Verfahrensfunktion erfülle die Bed. (6.10). Dann liegt die Konvergenzordnung p vor, d.h. es gilt

$$\max_{k=0,\dots,N} |y_k - y(t_k)| \le K h_{max}^p$$

mit einer Konstanten K, die vom Intervall $[a,b]$, Konstanten C aus der Abschätzung (6.9) und L_1, L_2 aus (6.10) herrührt.

Bewiesen werden soll der Satz 6.8 für ein explizites Einschrittverfahren (Beweise von allg. Einschrittverfahren findet man in Bärwolff oder Schwarz).

Benötigt wird der

Hilfssatz 6.9

Für Zahlen $L > 0$, $a_k \geq 0$, $h_k > 0$ und $b \geq 0$ sei

$$a_{k+1} \leq (1 + h_k L) a_k + h_k b, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

erfüllt. Dann gelten die Abschätzungen

$$a_k \leq \frac{e^{L t_k} - 1}{L} b + e^{L t_k} a_0 \quad \text{mit } t_k = \sum_{j=0}^{k-1} h_j$$

$$(\ell = 0, \dots, N).$$

Beweis (vollst. Induktion)

Induktionsanfang ist für $k=0$ offensichtlich gewährleistet. Der Schritt $k \to k+1$ ergibt sich wie folgt:

$$a_{k+1} \leq \underbrace{(1 + h_k L)}_{\leq e^{h_k L}} \left(\frac{e^{L t_k} - 1}{L} b + e^{L t_k} a_0 \right) + h_k b$$

$$\leq \left(\frac{e^{L(t_k + h_k)} - 1 - h_k L}{L} + h_k \right) b + e^{L(t_k + h_k)} a_0$$

$$= \frac{e^{L t_{k+1}} - 1}{L} b + e^{L t_{k+1}} a_0 . \qquad \square$$

Beweis von Satz 6.8

Mit den Fehlergrößen

$$e_k = y_k - y(t_k)\ ,\quad k = 0,1,\dots,N$$

gilt für $k = 0,1,\dots,N-1$

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h_k\,\phi(t_k, y(t_k), h_k) - d_{k+1}$$

$$y_{k+1} = y_k + h_k\,\phi(t_k, y_k, h_k)$$

und damit

$$e_{k+1} = e_k + h_k\big(\phi(t_k, y_k, h_k) - \phi(t_k, y(t_k), h_k)\big) + d_{k+1}$$

bzw.

$$|e_{k+1}| \le |e_k| + h_k\,|\phi(t_k, y_k, h_k) - \phi(t_k, y(t_k), h_k)| + |d_{k+1}|$$

$$\le (1 + h_k L_1)\,|e_k| + h_k C\, h_{max}^p\,.$$

Die Abschätzung des Hilfssatzes 6.9 liefert wegen $e_0 = 0$ die Behauptung des Satzes 6.8 $\square$

Spezielle Einschrittverfahren

Euler-Verfahren

Mit der Verfahrensfunktion

$$\phi(t, y, h_k) = f(t, y)$$

erhält man mit

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)\ ,\ k = 0,\dots,N-1\ ,\ y_0 = y_0 \qquad (6.11)$$

das Euler-Verfahren.

Für eine stetig (partiell) diff'bare Funktion $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

besitzt das Euler-Verfahren die Konsistenzordnung $p=1$, denn mit der Taylorentwicklung

$$y(t+h) = y(t) + y'(t)h + \frac{h^2}{2} y''(\xi) \quad , \xi \in [a,b]$$

erhält man

$$d_{k+1} = y(t_{k+1}) - y(t_k) - h_k \underbrace{f(t_k, y(t_k))}_{= y'(t_k)} = \frac{h_k^2}{2} y''(\xi)$$

bzw.

$$|d_{k+1}| \leq C h_k^2 \quad \text{mit } C = \frac{1}{2} \max_{\xi \in [a,b]} |y''(\xi)| \, .$$

Einschrittverfahren der Konsistenzordnung $p=2$

Um ein explizites Einschrittverfahren der Konsistenzordnung $p=2$ zu erhalten, machen wir den Ansatz

$$\Phi(t,y,h) = a_1 f(t,y) + a_2 f(t+b_1 h, y + b_2 h f(t,y)), \qquad (6.12)$$

$$t \in [a,b], \ 0 \leq h \leq b-t, \ y \in \mathbb{R},$$

mit noch festzulegenden Konstanten $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Es gilt nun der

Satz 6.10

Ein Einschrittverfahren (6.6) mit einer Verfahrensfunktion der Form (6.12) ist konsistent mit der Ordnung $p=2$, falls $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig part. diff'bar ist und für die Koeffizienten

$$a_1 + a_2 = 1 \quad , \ a_2 b_1 = \frac{1}{2} \quad , \ a_2 b_2 = \frac{1}{2} \qquad (6.13)$$

gilt.

Beweis

Taylorentwicklungen von $\phi(t, y(t), \cdot)$ im Punkt $h=0$ und von der Lösung y ist ergeben

$$\phi(t, y(t), h) = \phi(t, y(t), 0) + O(h^2)$$

$$= \Big[\underbrace{(a_1+a_2)}_{1} f(t, y(t)) + h\Big(\overbrace{a_2 b_1}^{1/2} \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \overbrace{a_2 b_2}^{1/2} f(t, y(t)) * \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t))\Big)\Big] + O(h^2)$$

$$= f(t, y(t)) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{h}{2} f(t, y(t)) \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + O(h^2),$$

$$y(t+h) = y(t) + h y'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) + O(h^3)$$

$$= y(t) + h\Big[f(t, y(t)) + \frac{h}{2} y''(t)\Big] + O(h^3)$$

$$= y(t) + h \underbrace{\Big[f(t, y(t)) + \frac{h}{2}\Big\{\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + f(t, y(t)) \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t))\Big\}\Big]}_{\phi(t, y(t), h) + O(h^2)} + O(h^3),$$

und damit folgt

$$d_{k+1} = y(t_{k+1}) - y(t_k) - h_k \phi(t_k, y(t_k), h_k) = O(h_k^3),$$

also $p=2$. $\square$

Mit der konkreten Wahl $a_1 = 0, a_2 = 1, b_1 = b_2 = 1/2$ erhält man mit

$$y_{k+1} = y_k + h_k f\Big(t_k + \frac{h_k}{2}, y_k + \frac{h_k}{2} f(t_k, y_k)\Big), \quad k = 0, \dots, N-1 \tag{6.14}$$

das modifizierte Euler-Verfahren (verbesserte Polygonzugmethode) mit der Konsistenzordnung $p=2$.

Mit der Wahl $a_1=a_2=\frac{1}{2}$, $b_1=b_2=1$ erhält man mit

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h_k}{2}\left[f(t_k,y_k)+f(t_k+h_k,y_k+h_k f(t_k,y_k))\right], \qquad (6.15)$$

$$k=0,\dots,N-1$$

das Verfahren von Heun mit der Konsistenzordnung $p=2$.