24. VL Einführung in die Num. Mathematik 8.7.2009

Allgemeine lineare Mehrschrittverfahren

Definition 6.18
Unter einem linearen m-Schrittverfahren $(m>1)$ versteht man eine Vorschrift mit $s=k-m+1$

$$\sum_{j=0}^{m} a_j y_{s+j} = h \sum_{j=0}^{m} b_j f(t_{s+j}, y_{s+j}) \qquad (6.49)$$

wobei $a_m \neq 0$ ist und a_j, b_j geeignet zu wählende reelle Zahlen sind. Die konkrete Wahl der Koeffizienten a_j, b_j entscheidet über die Ordnung des Verfahrens.

Bemerkung
In den bisher behandelten Verfahren war jeweils $a_m = 1$ und $a_{m-1} = -1$ sowie $a_{m-2} = \dots = a_0 = 0$.
Bei expliziten Verfahren ist $b_m = 0$ und bei impliziten Verfahren ist $b_m \neq 0$.

Ohne die Allg. einzuschränken setzen wir $a_m = 1$.
Die anderen freien Parameter a_j, b_j sind so zu wählen, dass die linke Seite von (6.49) und die rechte Seite von (6.49) Approximationen von

$$\alpha\left[y(t_{k+1}) - y(t_k)\right] \quad \text{bzw.} \quad \alpha \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\, dt$$

sind $(\alpha \neq 0)$.

Mit der Einführung der Parameter $a_0, \dots, a_m$ hat man die Möglichkeit durch die Nutzung der Werte $y_{k+1-m}, \dots, y_{k+1}$ nicht nur die Approximation von f, sondern auch die Approximation von y' mit einer höheren Ordnung durchzuführen.

Beispiel

Das 3-Schritt-Adams-Bashforth-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}\left[23 f_k - 16 f_{k-1} + 5 f_{k-2}\right]$$

ist gleichbedeutend mit

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{1}{12}\left[23 f_k - 16 f_{k-1} + 5 f_{k-2}\right]$$

wobei die rechte Seite eine Approx. von $f(t_k, y(t_k))$ der Ordnung $O(h^3)$ darstellt, während die linke Seite y' an der Stelle t_k nur mit der Ordnung $O(h)$ approximiert.

Nutzt man neben y_{k+1} und y_k auch noch y_{k-1} und y_{k-2}, dann kann man unter Nutzung der Taylor-Approximationen

$$y(t_{k-2}) = y(t_k) - 2h y' + 2h^2 y'' - \frac{3}{2} h^3 y''' + O(h^4)$$
$$y(t_{k-1}) = y(t_k) - h y' + \frac{h^2}{2} y'' - \frac{h^3}{6} y''' + O(h^4)$$
$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h y' + \frac{h^2}{2} y'' + \frac{h^3}{6} y''' + O(h^4)$$

mit

$$\frac{1}{14h}\left[5 y_{k+1} + 6 y_k - 13 y_{k-1} + 2 y_{k-2}\right]$$

die linke Seite y' ebenfalls mit der Ordnung $O(h^3)$ approximieren.

Definition 6.19

Das lineare Mehrschrittverfahren (6.49) hat die Fehlerordnung p, falls in der Entwicklung des lokalen Diskretisierungsfehlers d_{k+1} in eine Potenzreihe von h für eine beliebige Stelle $\tilde{t} \in [t_{k+1-m}, t_{k+1}]$

$$d_{k+1} = \sum_{j=0}^{m} [a_j y(t_{s+j}) - h b_j f(t_{s+j}, y(t_{s+j}))] \qquad (6.50)$$

$$= C_0 y(\tilde{t}) + C_1 h y'(\tilde{t}) + \ldots + C_p h^p y^{(p)}(\tilde{t}) + C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(\tilde{t}) + \ldots$$

$C_0 = \ldots = C_p = 0$ und $C_{p+1} \neq 0$ gilt ($s = k+1-m$).

Ein Mehrschrittverfahren heißt konsistent, wenn es mindestens die Ordnung $p = 1$ besitzt.

Durch eine günstige Wahl von $\tilde{t}$ kann man die Entwicklungskoeffizienten C_j oft in einfacher Form als Linearkombinationen von a_j, b_j darstellen und erhält mit der Bedingung $C_0 = C_1 = \ldots = C_p = 0$ Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten des Mehrschrittverfahrens.

Mit der Wahl von $\tilde{t} = t_{k+1-m} = t_s$ ergeben sich für y, y' die Taylor-Reihen

$$y(t_{s+j}) = y(\tilde{t} + jh) = \sum_{r=0}^{q} \frac{(jh)^r}{r!} y^{(r)}(\tilde{t}) + R_{q+1}$$

$$(6.51)$$

$$y'(t_{s+j}) = y'(\tilde{t} + jh) = \sum_{r=0}^{q-1} \frac{(jh)^r}{r!} y^{(r+1)}(\tilde{t}) + R_q .$$

Die Substitution der Reihen (6.51) in (6.50) ergibt für die Koeffizienten C_j durch Koeffizientenvergleich

$$C_0 = a_0 + a_1 + \ldots + a_m$$

$$C_1 = a_1 + 2a_2 + \ldots + m a_m - (b_0 + b_1 + \ldots + b_m) \qquad (6.52)$$

$$C_2 = \frac{1}{2!}(a_1 + 2^2 a_2 + \ldots + m^2 a_m) - \frac{1}{1!}(b_1 + 2b_2 + \ldots + m b_m)$$

$$\vdots$$

$$C_r = \frac{1}{r!}(a_1 + 2^r a_2 + \ldots + m^r a_m) - \frac{1}{(r-1)!}(b_1 + 2^{r-1} b_2 + \ldots + m^{r-1} b_m)$$

für $r = 2, 3, \ldots, q$.

Beispiel

Es soll ein explizites 2-Schritt-Verfahren

$$a_0 y_{k-1} + a_1 y_k + a_2 y_{k+1} = h\,[b_0 f_{k-1} + b_1 f_k]$$

der Ordnung 2 bestimmt werden. Mit der Fixierung von $a_2 = 1$ ergibt sich mit

$$C_0 = a_0 + a_1 + 1 = 0$$

$$C_1 = a_1 + 2 - (b_0 + b_1) = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(a_1 + 4) - b_1 = 0$$

ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen für 4 Unbekannte zur Verfügung, d.h. es gibt noch einen Freiheitsgrad. Wählt man $a_1 = 0$, dann folgt für die restlichen Parameter $a_0 = -1$, $b_0 = 0$ und $b_1 = 2$, so dass das Verfahren die Form

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h\,2 f_k \qquad (6.53)$$

hat.

Definition 6.20
Mit den Koeffizienten a_j, b_j werden durch

$$\varrho(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^j \;, \quad \sigma(z) = \sum_{j=0}^{m} b_j z^j \qquad (6.54)$$

das erste und zweite charakteristische Polynom eines m-Schritt-Verfahrens erklärt.

Aus dem Gleichungssystem (6.52) kann man mit Hilfe der charakteristischen Polynome die folgende notwendige und hinreichende Bedingung für die Konsistenz eines Mehrschrittverfahrens formulieren.

Satz 6.21
Notwendig und hinreichend für die Konsistenz des Mehrschrittverfahrens (6.49) ist die Erfüllung der Bedingungen

$$C_0 = \varrho(1) = 0 \;, \quad C_1 = \varrho'(1) - \sigma(1) = 0 . \qquad (6.55)$$

Macht man außer der Wahl von $a_2 = 1$ keine weiteren Einschränkungen an die Koeffizienten des expliziten 2-Schritt-Verfahrens

$$a_0 y_{k-1} + a_1 y_k + a_2 y_{k+1} = h\,[b_0 f_{k-1} + b_1 f_k] ,$$

dann erreicht man die maximale Ordnung $p = 3$ durch die Lösung des Gleichungssystems (6.52) für $q = 3$, also $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$.

Man findet die eindeutige Lösung

$$a_0 = -5 \,,\, a_1 = 4 \,,\, b_0 = 2 \,,\, b_1 = 4 \,,$$

woraus das Verfahren

$$y_{k+1} = 5y_{k-1} - 4y_k + h[4f_k + 2f_{k-1}] \qquad (6.56)$$

folgt.

Obwohl das Verfahren (6.56) die maximale Fehlerordnung $p=3$ hat, ist es im Vergleich zum Verfahren (6.53) unbrauchbar, weil es nicht stabil ist. Was das konkret bedeutet soll im Folgenden erklärt und untersucht werden.

Dazu wird die Testdifferentialgleichung (AWP)

$$y' = \lambda y \,,\, y(0) = 1 \,,\, \lambda \in \mathbb{R} \,,\, \lambda < 0 \qquad (6.57)$$

mit der eindeutig bestimmten Lösung $y(t) = e^{\lambda t}$ betrachtet.

Von einem brauchbaren numerischen Verfahren erwartet man mindestens die Widerspiegelung des qualitativen Lösungsverhaltens.

Mit $f = \lambda y$ folgt aus (6.56)

$$y_{k+1} = 5y_{k-1} - 4y_k + h[4\lambda y_k + 2\lambda y_{k-1}]$$

$$\Longleftrightarrow (-5 - 2\lambda h)y_{k-1} + (4 - 4\lambda h)y_k + y_{k+1} = 0. \qquad (6.58)$$

Mit dem Lösungsansatz $y_k = z^k$, $z \neq 0$ ergibt (6.58) nach Division mit z^{k-1}

$$(-5 - 2\lambda h) + (4 - 4\lambda h)z + z^2 = 0$$

bzw. mit den charakteristischen Polynomen

$$\varrho(z) = -5 + 4z + z^2 \,,\, \sigma(z) = 2 + 4z$$

$$\Phi(z) = \varrho(z) - \lambda h \sigma(z) = 0 .$$

Als Nullstellen von Φ findet man

$$z_{1,2} = -2 + 2\lambda h \pm \sqrt{(2-2\lambda h)^2 + 5 + 2\lambda h}$$

und damit für die Lösung y_k von (6.58)

$$y_k = C_1 z_1^k + C_2 z_2^k , \qquad (6.59)$$

wobei die Konstanten C_1, C_2 aus Anfangsbedingungen der Form $C_1 + C_2 = y_0$, $z_1 C_1 + z_2 C_2 = y_1$ zu ermitteln sind.

Notwendig für das Abklingen der Lösung y_k in der Form (6.59) für wachsendes k ist die Bedingung $|z_{1,2}| \leq 1$.

Da für $h \to 0$ die Nullstellen von $\Phi(z)$ in die Nullstellen von $\varrho(z)$ übergehen, dürfen diese dem Betrage nach nicht größer als 1 sein.

Im Fall einer doppelten Nullstelle z von $\Phi(z)$ eines 2-Schritt-Verfahrens hat die Lösung der entsprechenden Differenzengleichung statt (6.59) die Form

$$y_k = C_1 z^k + C_2 k z^k ,$$

sodass für das Abklingen von y_k für wachsendes k die Bedingung $|z| < 1$ erfüllt sein muss.

Die durchgeführten Ueberlegungen rechtfertigen die folgende Definition.

Definition 6.22

Das Mehrschrittverfahren (6.49) heißt <u>nullstabil</u>, falls die Nullstellen z_j des ersten charakteristischen Polynoms $\varrho(z)$

a) betragsmäßig nicht größer als 1 sind und

b) mehrfache Nullstellen betragsmäßig echt kleiner als 1 sind.

Für das oben konstruierte 2-Schritt-Verfahren mit der maximalen Fehlerordnung $p=3$ hat das charakteristische Polynom $\varrho(z)$ die Nullstellen $z_{1,2}=-2\pm 3$ und damit ist das Verfahren nicht nullstabil.
Im Unterschied dazu ist das Verfahren (6.53) mit der Ordnung 2 und dem charakteristischen Polynom $\varrho(z)=-1+z^2$ und den Nullstellen $z_{1,2}=\pm 1$ nullstabil.

Bemerkung

Einschrittverfahren sind mit dem charakteristischen Polynom $\varrho(z)=-1+z$ generell nullstabil.
Aufgrund der ersten charakteristischen Polynome der Adams-Bashforth- und Adams-Moulton-Verfahren erkennt man, dass diese auch generell nullstabil sind.