Bemerkung

Konsistente und nullstabile Mehrschrittverfahren sind konvergent, falls die Funktion $f(t,y)$ bezügl. y lipschitzstetig ist.
Der Beweis verläuft im Fall expliziter Mehrschrittverfahren analog zum Konvergenzbeweis für konsistente Einschrittverfahren und sollte als Übung erbracht werden.

Begriff der absoluten Stabilität

Bei den Betrachtungen zur Nullstabilität wurde eine Testaufgabe zugrunde gelegt. Um den Begriff der absoluten Stabilität zu erläutern, wird die Testaufgabe leicht modifiziert, und zwar zu

$$y' = \lambda y \;,\quad y(0)=1 \;,\quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ oder } \lambda \in \mathbb{C}. \quad (6.60)$$

D.h. wir lassen auch Parameter λ aus $\mathbb{C}$ zu. Damit sind auch Lösungen der Form $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ möglich. Numerische Lösungsverfahren sollen auch in diesem Fall für $\alpha = \mathrm{Re}(\lambda) < 0$ den dann stattfindenden Abklingprozess korrekt wiedergeben.
Für das Eulerverfahren zur Lösung von (6.60) erhält man mit $f(t,y)=\lambda y$

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_k \Longleftrightarrow y_{k+1} = (1+h\lambda)\, y_k =: F(h\lambda)\, y_k .$$

Falls $\lambda > 0$ und reell ist, wird die Lösung, für die

$$y(t_{k+1}) = y(t_k + h) = e^{h\lambda} y(t_k)$$

gilt, in jedem Fall qualitativ richtig wiedergegeben, denn der Faktor $F(h\lambda) = 1 + \lambda h$ besteht gerade aus den beiden ersten Summanden der e-Reihe, und es wird ein Fehler der Ordnung 2 gemacht.

Im Fall $\lambda < 0$ wird nur unter der Bedingung $|F(h\lambda)| = |1 + \lambda h| < 1$ das Abklingverhalten der Lösung beschrieben. Der Fall des reellen Parameters $\lambda < 0$ ist deshalb von Interesse.

Beim R-K-Verfahren 3. Ordnung

$$k_1 = \lambda y_k, \quad k_2 = \lambda(y_k + \tfrac{1}{2} h k_1) = (\lambda + \tfrac{1}{2} h \lambda^2) y_k \qquad (6.61)$$

$$k_3 = \lambda(y_k - h k_1 + 2h k_2) = (\lambda + h\lambda^2 + h^2\lambda^3) y_k$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}[k_1 + 4k_2 + k_3] = \left(1 + h\lambda + \frac{h^2}{2}\lambda^2 + \frac{h^3}{6}\lambda^3\right) y_k$$

also y_{k+1} als Produkt von y_k mit dem Faktor

$$F(h\lambda) = 1 + h\lambda + \frac{h^2}{2}\lambda^2 + \frac{h^3}{6}\lambda^3. \qquad (6.62)$$

Der Faktor (6.62) enthält gerade die ersten 4 Summanden der e-Reihe und es wird ein Fehler der Ordnung 4 gemacht, so dass $y(t) = e^{t\lambda}$ durch das Verfahren (6.61) qualitativ beschrieben wird.

Für $\lambda < 0$, reell, muss die Lösung abklingen, was durch die Bedingung $|F(h\lambda)| < 1$ erreicht wird.

Wegen $\lim\limits_{h\lambda \to -\infty} F(h\lambda) = -\infty$ wird das Abklingen nicht für beliebige negative Parameter λ gesichert (nur für λ mit $|F(h\lambda)| < 1$).

Auch im Fall eines komplexen Parameters λ reicht die Bedingung $\alpha = Re(\lambda) < 0$ nicht aus, um das Abklingen der Lösung der Testaufgabe zu sichern, sondern für F muss $|F(h\lambda)| < 1$ gelten.

Die durchgeführten Überlegungen rechtfertigen die

Definition 6.22

Für ein Einschrittverfahren, das für die Testaufgabe $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$, auf die Vorschrift $y_{k+1} = F(h\lambda) y_k$ führt, nennt man die Menge

$$B = \{\mu \in \mathbb{C} \mid |F(\mu)| < 1\}$$

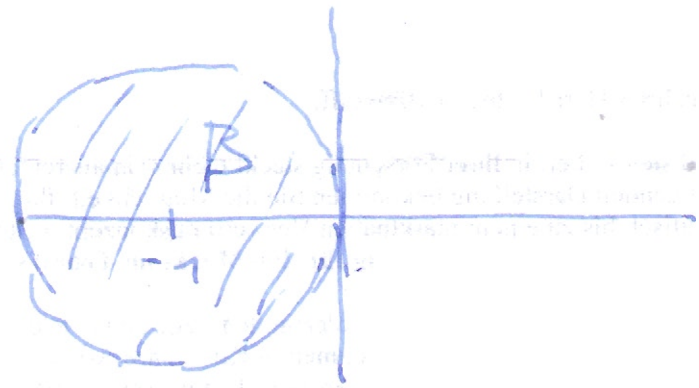
<u>Gebiet der absoluten Stabilität.</u>

Das Gebiet der absoluten Stabilität liefert keine Information zur Wahl der Schrittweite. Da man aber in den meisten "Ernstfällen" eventuelle Abklingkonstanten nicht kennt, hat man mit der Kenntnis von B keine quantitative Bedingung zur Berechnung der Schrittweite zur Verfügung.

Beispiele für Gebiete der absoluten Stabilität

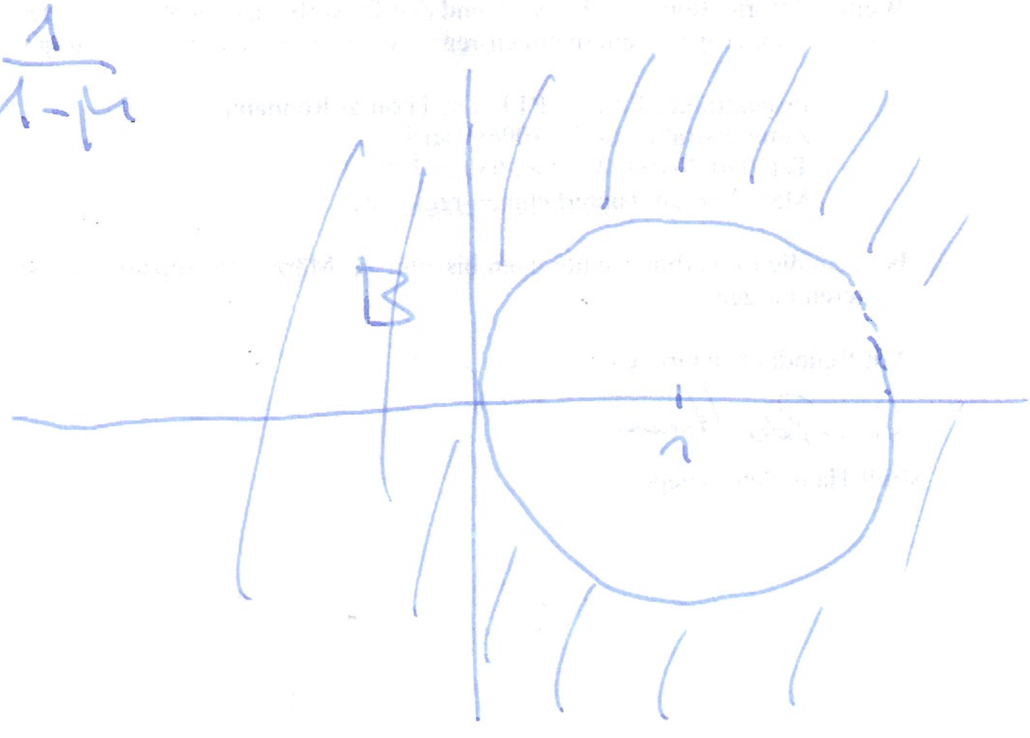
Euler-explizit $y_{k+1} = y_k + h\lambda y_k$

$F(\mu) = 1 + \mu$



Euler-implizit $y_{k+1} = y_k + h\lambda y_{k+1}$

$F(\mu) = \frac{1}{1-\mu}$

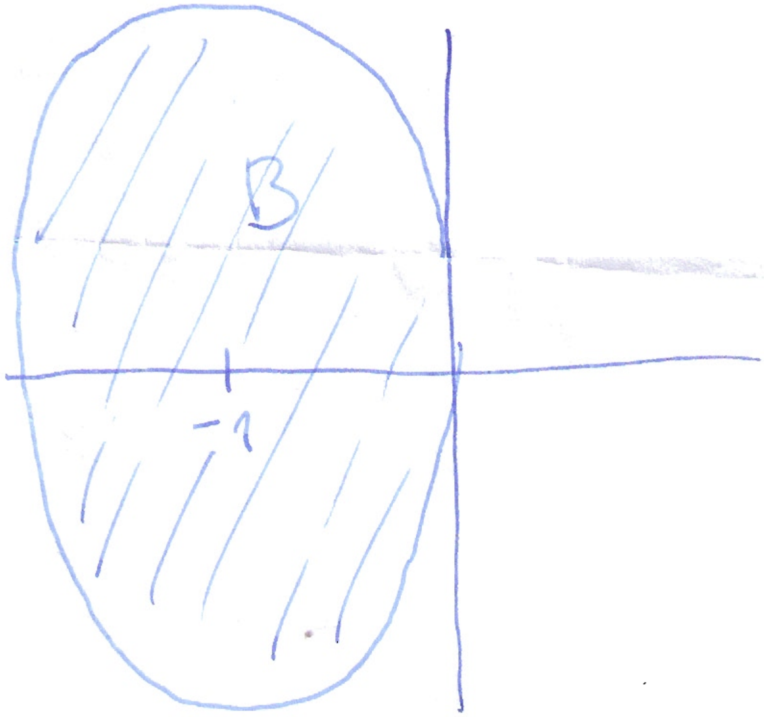


Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung

$k_1 = f(t_k, y_k)$, $k_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_1)$, $y_{k+1} = y_k + h k_2$

$\Leftrightarrow \quad y_{k+1} = y_k + h\left(\lambda y_k + \frac{\lambda h}{2} y_k\right) = \left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2}\right) y_k$

$\to \quad F(\mu) = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2}$



Bemerkung

Die Randkurve von B erhält man wegen $|e^{i\theta}| = 1$ über die Parametrisierung

$F(\mu) = 1 + \mu + \frac{1}{2}\mu^2 = e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow \quad \mu^2 + 2\mu + 2 - 2e^{i\theta} = 0$

$\leadsto \quad \mu(\theta) = -1 \pm \sqrt{1 - 2 + 2e^{i\theta}}$, $\theta \in [0, 2\pi]$

In der folgenden Tabelle sind die reellen Stabilitätsintervalle, d.h. die Schnittmenge der Gebiete der absoluten Stabilität mit der Re(μ)-Achse, für explizite r-stufige Runge-Kutta-Verfahren angegeben

r	
1	$]-2, 0[$
2	$]-2, 0[$
3	$]-2{,}51, 0[$
4	$]-2{,}78, 0[$
5	$]-3{,}21, 0[$

Definition 6.23

Hat ein Einschrittverfahren als Gebiet der absoluten Stabilität mindestens die gesamte linke Halbebene, also $B \supset \{\mu \in \mathbb{C} \mid Re(\mu) < 0\}$, dann nennt man das Verfahren absolut stabil.

Neben dem impliziten Eulerverfahren (einstufiges R-K-Verfahren) sind auch andere implizite Runge-Kutta-Verfahren absolut stabil. z.B. das Verfahren

$$k_1 = f(t_k + \tfrac{h}{2}, y_k + \tfrac{h}{2}k_1), \quad y_{k+1} = y_k + hk_1.$$

Mit $f = \lambda y$ erhält man

$$k_1 = \lambda(y_k + \tfrac{h}{2}k_1) \longrightarrow k_1 = \frac{\lambda}{1-\frac{h\lambda}{2}} y_k$$

$$y_{k+1} = y_k + hk_1 = y_k + \frac{\lambda}{1-\frac{h\lambda}{2}} y_k = \frac{1+\frac{h\lambda}{2}}{1-\frac{h\lambda}{2}} y_k =: F(h\lambda)\, y_k$$

und da für negatives a gilt

$|1+a+bi| < |1-a-bi| \quad \Rightarrow \quad |F(\mu)| < 1.$