Technische Universität Berlin Sommersemester 2009
Fakultät II; Institut für Mathematik
Prof. Dr. Günter Bärwolff, Ira Neitzel 17. April 2009

Einführung in die Numerische Mathematik

1. Übungsblatt

Abgabe am 29. April 2009 **vor** der Vorlesung

Aufgabe 1.1 **3 Punkte**

Zu lösen sei die quadratische Gleichung

$$x^2 - 2px - q = 0, \qquad \text{für} \quad p = 2, \quad q = 0.0005$$

in vier– und fünfstelliger Gleitkommaarithmetik im Dezimalsystem. Dabei sollen folgende Algorithmen untersucht werden:

(i) $d = p^2 + q$, $x_1 = p + \sqrt{d}$, $x_2 = p - \sqrt{d}$, ($p - q$ Formel)

(ii) $d = p^2 + q$, $x_1 = p + \sqrt{d}$, $x_2 = -q/x_1$. (Vietascher Wurzelsatz)

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung und erklären Sie die unterschiedlichen Resultate.

Aufgabe 1.2 **4 Punkte**

Zur Berechnung der Summe $\sum_{i=0}^{n} x_i$ wird folgender Algorithmus vorgeschlagen:

$S = 0, D = 0$

for $i = 1$ to n do

$S_{alt} = S$
$S = S + x_i$
$D = D + (x_i - (S - S_{alt}))$

end i

$S = S + D$

Warum ist dieser Algorithmus der einfachen Summation überlegen? Konstruieren Sie ein Beispiel.

bitte wenden!

Aufgabe 1.3 **6 Punkte**

Sei eine Basis $\beta \in \{2, 3, \ldots\}$ gegeben und normierte Gleitkommazahlen G mit beliebigen Exponenten und Mantissenlänge t der der Form

$$\pm 0.x_1 x_2 \ldots x_t \times \beta^e, \quad x_i \in \{0, 1, \ldots, \beta - 1\}, \quad x_1 \neq 0, \quad e \in \mathbb{Z}.$$

Mit $e(x)$ sei der Exponent e der normierten Gleitkommazahl x bezeichnet. Der Rundungsoperator

$$\mathrm{rd} : \mathbb{R} \to G \quad x \mapsto \mathrm{rd}(x)$$

sei so implementiert, dass $|\mathrm{rd}(x) - x| \leq |y - x|$ für alle $y \in G$ gelte. Die Realisierung der Subtraktion sei durch

$$\ominus : G \times G \to G \quad (x, y) \mapsto x \ominus y := \mathrm{rd}(x - y)$$

gegeben, wobei $x - y$ das exakte Ergebnis ist (vgl. auch IEEE-Standard).

Seien nun $x, y \in G$. Zeigen Sie folgende Resultate:

(a) Gilt $e(x - y) \leq \min(e(x), e(y))$, dann folgt

$$x \ominus y = x - y,$$

das heisst, das Ergebnis ist exakt.

(b) Gilt $y/2 \leq x \leq 2y$, dann gilt ebenfalls $x \ominus y = x - y$.

Bemerkung: Die Ergebnisse gelten ebenfalls für Gleitkommazahlen mit beschränkten Exponenten $e_{\min} \leq e \leq e_{\max}$, falls nichtnormalisierte Zahlen zugelassen werden. Daraus folgt, dass die Behauptungen insbesondere für Gleitkommazahlen nach dem IEEE-Standard gültig sind.

Programmieraufgabe 1 – Abgabe auch mit dem 2. Übungsblatt möglich **10 Punkte**

Schreiben Sie Programme

`e = meps()`, `m = minimum()`, bzw. `m = maximum()`

die das Maschinenepsilon `eps`, die kleinste darstellbare positive Zahl $x_{\min}$, bzw. die grösste darstellbare Zahl $x_{\max}$ berechnen. Dabei ist `eps` als die kleinste Zahl definiert für die $1 \oplus \texttt{eps} > 1$ gilt. In den Programmen soll nur benutzt werden, dass intern eine Gleitkommadarstellung basierend auf dem Dualsystem verwendet wird.

Geben Sie die Ergebnisse aus und vergleichen Sie sie mit denen der entsprechenden MATLAB Funktionen (`eps`, `realmin`, `realmax`). Interpretieren Sie die Unterschiede.