

Einführung in die Numerische Mathematik

2. Übungsblatt

Abgabe am 06. Mai 2009 vor der Vorlesung

Hausaufgaben

Aufgabe 2.1

6 Punkte

Das Volumen einer dünnwandigen Hohlkugel mit innerem Radius r und Wanddicke a ist

$$V = \frac{4}{3}\pi((r+a)^3 - r^3) \quad (1)$$

- Schätzen Sie den absoluten und den relativen Fehler des Problems bei Störungen in den Eingangsdaten a, r ab.
- Schätzen Sie den relativen Fehler der Lösung für sehr dünnwandige Hohlkugeln ($a \rightarrow 0$) ab.
- Was folgt für die Kondition dieses Problems?
- Begründen Sie, warum die Auswertung in der Form (1) als Algorithmus nicht geeignet ist. Zeigen Sie, wie man sie verbessern kann!

Aufgabe 2.2

4 Punkte

Die Frobeniusnorm einer reellen $n \times n$ Matrix A ist definiert als $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2}$.

Zeigen Sie:

- a) $\|\cdot\|_F$ ist eine Norm b) $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$

Aufgabe 2.3

8 Punkte

Vorbereitung der Programmieraufgabe

Gegeben sei

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx. \quad (2)$$

- a) Zeigen Sie: $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- b) Bestimmen Sie eine Rekursionsformel $I_n = R(I_{n-1})$ und geben Sie den zugehörigen Startwert I_0 an (Hinweis: partielle Integration). Zeigen Sie, dass sich I_n explizit als:

$$I_n = -\frac{n!}{e} \left(\sum_{i=0}^n \frac{1}{(n-i)!} \right) + n! \quad (3)$$

schreiben lässt. Geben Sie eine anschauliche Begründung des Verhaltens von I_n für $n \rightarrow \infty$.

- c) Bestimmen Sie eine Rekursionsformel $I_{n-1} = \tilde{R}(I_n)$ zur Berechnung von I_0 aus Aufgabenteil b).

Programmieraufgabe 2

15 Punkte

- Schreiben Sie in MATLAB eine Routine

```
I=int_explicit(n),
```

welche für vorgegebenes n das Integral (2) mit Hilfe der Formel (3) berechnet, und eine Routine

```
I=int_rekursiv(n, I0),
```

welche für vorgegebenes n und I_0 das Integral (2) mit Hilfe der Rekursionsformel aus Hausaufgabe 2.3b) berechnet. Beachten Sie dabei, dass dieses Programm sich selbst aufrufen darf. Bestimmen Sie I_n für $n = 10$, $n = 15$, $n = 20$ und $n = 30$ mit beiden Programmen und erklären Sie Ihre Beobachtungen unter Berücksichtigung der Überlegungen aus Hausaufgabe 2.3.

- Schreiben Sie weiterhin eine MATLAB-Routine

```
I0=int_invers(n, In),
```

welche für vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$ und I_n das Integral I_0 mit Hilfe der inversen Rekursionsformel aus Hausaufgabe 2.3c) berechnet. Bestimmen Sie I_0 mit $n = 30$ und $I_{30} = 0$ sowie mit $n = 30$ und $I_{30} = 10^{10}$. Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

Programmieraufgabe 1

10 Punkte

Die Programmieraufgabe 1 vom 1. Übungsblatt kann noch gemeinsam mit dieser Hausaufgabe abgegeben werden.

Die fertigen Programme müssen zum Abgabetermin per e-mail an Ihren Tutor geschickt werden. Zusätzlich muss der Programmcode ausgedruckt der Abgabe beigelegt werden. Denken Sie daran, die zu den Programmieraufgaben gestellten Fragen zu beantworten.