

Einführung in die Numerische Mathematik

3. Übungsblatt

Abgabe am 13. Mai 2009 vor der Vorlesung

Hausaufgaben

Aufgabe 3.1

4 Punkte

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \\ 6 & 5 & 14 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 13 \\ 34 \\ 27 \\ 66 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie per Hand die LR -Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung sowie die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

Aufgabe 3.2

6 Punkte

Die Kondition von A gibt an, wie stark sich bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ Fehler in A und b auf den Fehler im Ergebnis x auswirken. Das System wird nun mit einer LR -Zerlegung gelöst. Die Kondition von A sei bekannt.

- Schätzen Sie die Kondition von R durch die Kondition von A ab.
- Schätzen Sie die Kondition einer Gauss-Transformationsmatrix M_k mit und ohne Verwendung von Spaltenpivotsuche nach oben ab. Verwenden Sie eine beliebige Matrixnorm.
- Was ergibt sich aus (b) für die Kondition von R ? Kommentieren Sie die Qualität der erhaltenen Abschätzung für große n .

Aufgabe 3.3

4 Punkte

Sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n+1, n+1}$ gegeben durch $A = \begin{bmatrix} U & v \\ w^T & 0 \end{bmatrix}$, wobei $U \in \mathbb{R}^{n, n}$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist und $w, v \in \mathbb{R}^n$.

- Geben Sie die LR -Zerlegung der Matrix A an.
- Zeigen Sie, dass A genau dann nichtsingulär ist, wenn $w^T U^{-1} v \neq 0$.
- Formulieren Sie einen Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ und geben Sie den Aufwand in Abhängigkeit von n an.

Programmieraufgabe 3

15 Punkte

Schreiben Sie eine Matlab-Routine

```
[LR,piv]=gaussplr(A)
```

die die LR -Zerlegung mit Spaltenpivotisierung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ berechnet: $LR = PA$. Die Permutationsmatrix soll dabei in dem Vektor `piv` der Länge n geeignet abgespeichert werden. Die Matrizen L und R sollen in einer Matrix `LR` der Grösse $n \times n$ zurückgegeben werden. Dabei sollen im strikten unteren Dreieck von `LR` die strikten unteren Einträge von L , und im oberen Dreieck die oberen Einträge von R stehen.

Schreiben Sie Programme `vorwaerts` und `rueckwaerts` die ausgehend von der berechneten LR Zerlegung mit Spaltenpivotisierung die Gleichungssysteme $Lz = Pb$ bzw. $Rx = z$ lösen:

```
z=vorwaerts(LR,piv,b), x=rueckwaerts(LR,piv,z)
```

Schreiben Sie ein Programm

```
x=gauss(A,b)
```

das die obigen Programme nutzt um das Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen.

Testen Sie Ihre Algorithmen anhand des Beispiels aus Aufgabe 3.1.

Die fertigen Programme müssen zum Abgabetermin per e-mail an Ihren Tutor geschickt werden. Zusätzlich muss der Programmcode ausgedruckt der Abgabe beigelegt werden. Denken Sie daran, die zu den Programmieraufgaben gestellten Fragen zu beantworten.