

Einführung in die Numerische Mathematik 5. Übungsblatt

Abgabe am 27. Mai 2009 vor der Vorlesung

Hausaufgaben

Aufgabe 5.1

4 Punkte

Bestimmen Sie ein Polynom p vom Grad ≤ 4 , für das gilt:

$$p(1) = 2, \quad p'(1) = 1, \quad p(4) = 3, \quad p'(4) = 2, \quad p''(4) = 1$$

Aufgabe 5.2

6 Punkte

Sei p das interpolierende Polynom zur Funktion

$$f(x) = (x + 4)^{-2}$$

unter Verwendung der Stützstellen $\{-2, -1, 1, 2\}$.

Beweisen Sie die Abschätzung

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{5}{16}, \quad \forall x \in [-2, 2].$$

Aufgabe 5.3

6 Punkte

Zeigen Sie:

- (a) Die Tschebyscheff-Polynome T_k ($k \in \mathbb{N}$) mit

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad x \in [-1, 1],$$

erfüllen die Rekursionsformel

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k \geq 2. \quad (1)$$

- (b) Es gilt

$$T_k(x) = \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^k + (x - \sqrt{x^2 - 1})^k \right], \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}.$$

Tipp: Machen Sie den Ansatz $T_k = \lambda^k$.

- (c) T_k ist ein Polynom vom Grad k und für $k \geq 1$ ist der höchste Koeffizient $a_k = a_k(T_k) = 2^{k-1}$.

Programmieraufgabe 5

15 Punkte

- (a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `polynom`, die zu einer gegebenen Menge von Datenpaaren $(x_i, f_i)_{i=1, \dots, n+1}$ das Interpolationspolynom n -ten Grades p_n bestimmt und zu beliebig vorgegebenen Stellen $(\bar{x}_i)_{i=1, \dots, m}$ die Werte $(p_n(\bar{x}_i))_{i=1, \dots, m}$ zurückgibt. Die Koeffizienten des Polynoms müssen nicht zurückgegeben werden. Das Polynom p_n kann nach Lagrange'scher oder Newton'scher Art berechnet werden.
- (b) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm `runge_aequidistant`, das mit Hilfe von `polynom` die sogenannte *Runge-Funktion*

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

mit 5, 10 und 15 äquidistanten Stützstellen x_i auf dem Intervall $[-1, 1]$ in 100 äquidistanten Punkten \bar{x}_i interpoliert. Plotten Sie das Interpolationspolynom und zum Vergleich die Funktion selbst.

- (c) Schreiben Sie weiterhin eine MATLAB-Funktion `tschebyscheff`, die für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ und einen beliebigen Vektor $x = (x_i)_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n$ die Werte $(T_k(x_i))_{i=1, \dots, n}$ des k -ten Tschebyscheff-Polynoms zurückgibt. Benutzen Sie die Rekursionsformel (1). Plotten Sie die Tschebyscheff-Polynome T_0, \dots, T_4 auf dem Intervall $[-1, 1]$.
- (d) Lösen Sie noch einmal Teil (b) der Programmieraufgabe. Benutzen Sie nun aber anstelle äquidistanter Stützstellen die Nullstellen des jeweiligen Tschebyscheff-Polynoms. Schreiben Sie dazu ein MATLAB-Programm `runge_tschebyscheff`. Die Nullstellen von T_k sind

$$x_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2k}\pi\right), \quad j = 1, \dots, k.$$

- (e) Vergleichen und kommentieren Sie die Ergebnisse der Aufgabenteile b) und f).

Kommentieren Sie Ihren Programmcode. Insbesondere müssen alle Ein- und Ausgabeparameter der einzelnen Funktionen erklärt werden.

Die fertigen Programme müssen zum Abgabetermin per e-mail an Ihren Tutor geschickt werden. Zusätzlich muss der Programmcode ausgedruckt der Abgabe beigelegt werden. Denken Sie daran, die zu den Programmieraufgaben gestellten Fragen zu beantworten.

Das ist das vorletzte Übungsblatt der ersten Semesterhälfte