Technische Universität Berlin
Fakultät II; Institut für Mathematik
Prof. Dr. Günter Bärwolff, Ira Neitzel

Sommersemester 2009

22. Mai 2009

Einführung in die Numerische Mathematik

6. Übungsblatt

Abgabe am 03. Juni 2009 **vor** der Vorlesung

Hausaufgaben

Aufgabe 6.1 **4 Punkte**

Mit der gewöhnlichen Spline-Interpolation ist es nicht möglich, beliebige (z.B. geschlossenene) Kurven im $\mathbb{R}^n$ darzustellen. Abhilfe läßt sich schaffen, wenn z .B. im $\mathbb{R}^2$ eine Parameterdarstellung $(x, y) = (x(t), y(t))$ mit t als Kurvenparameter verwendet wird, und dann x und y durch Splines s_x und s_y approximiert werden.

(a) Es seien die Interpolationspunkte $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2, j = 0, \ldots, n$, gegeben. Als Kurvenparameter t soll die Länge der Wegstrecke verwendet werden, die sich durch Verbindung der Interpolationspunkte durch einen Polygonenzug ergibt. Wie lautet die Transformation von (x_j, y_j) zu t_j, so daß sich

$$t_0 \quad = \quad 0 \quad \text{und} \quad (x(t_j), y(t_j)) \;=\; (x_j, y_j), \quad k = 0, \ldots, n$$

ergibt?

(b) Mit dieser Methode und kubischen Splines soll die linke Hälfte einer Ellipse mit den Halbachsen $A = 5, B = \sqrt{11}$, deren Zentrum im Ursprung liegt, approximiert werden. Es sollen die Interpolationspunkte

$$\{(0, \sqrt{11}), (-5, 0), (0, -\sqrt{11})\}$$

verwendet werden. Welche Randbedingungen sind zu verwenden, damit sich wirklich die Hälfte *einer Ellipse* ergibt?

(Zusatz) Lösen Sie die Aufgabe 6.1.b mit MATLAB und plotten Sie das Ergebnis mit mindestens 100 Punkten. Benutzen Sie die Routinen `spline` und `ppval`.

Aufgabe 6.2 **4 Punkte**

Bestimmen Sie den natürlichen interpolierenden kubischen Spline s für die Funktion $f(x) = x^3$ mit Stützstellen $x_0 = 1, x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. Wie lautet das Ergebnis, wenn die natürliche Randbedingungen durch die Interpolationsbedingungen

$$s''(x_0) = f''(x_0), \quad s''(x_2) = f''(x_2)$$

ersetzt werden?

Aufgabe 6.3 **4 Punkte**

Gegeben seien die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

und in $[0, 2\pi]$ äquidistante Stützstellen $x_i = \frac{i\pi}{4}$, $i = 0, \ldots, 8$. Bestimmen Sie das reelle interpolierende Fourierpolynom zu den Wertepaaren $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, 8$.

Programmieraufgabe 5 **10 Punkte**

Gegeben seien Werte $y_0, \ldots, y_{k-1}$, $y_k = y_0$, die als Funktionswerte einer 2π-periodischen Funktion an den äquidistanten Stellen $x_i = i\frac{2\pi}{k}$, $i = 0, \ldots, k$ interpretiert werden.

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die für gegebene Stützwerte y_i, $i = 0, \ldots, k = 2n$ das reelle trigonometrische Interpolationspolynom Ψ_n vom Grad n berechnet und zu beliebig vorgegebenen Stellen $(\bar{x}_i)_{i=1,\ldots,m}$ die Werte $(\Psi(\bar{x}_i))_{i=1,\ldots,m}$ zurückgibt. Dabei kann auf die Matlab-Funktion `fft` zurückgegriffen werden, um zunächst die komplexen Fourierkoeffizienten zu berechnen.

Testen Sie Ihr Programm mit den Daten

$$\begin{array}{llllll} y_0 = -7200, & y_1 = -300, & y_2 = 7000, & y_3 = 4300, & y_4 = 0, & y_5 = -5200, \\ y_6 = -7400, & y_7 = -2250, & y_8 = 3850, & y_9 = 7600, & y_{10} = 4500, & y_{11} = 250. \end{array}$$

Plotten Sie das Interpolationspolynom Ψ_n und die gegebenen Stützwerte in einer Graphik. Werten Sie dazu Ψ_n an genügend vielen Stellen $\bar{x}_i$ aus.

Beachten Sie: Die Variable `i` ist in MATLAB als die imaginäre Einheit vordefiniert (ebenso `j`). Verwendet man `i` in einer `for`-Schleife o.ä., so wird diese Variable überschrieben und entspricht nicht mehr der imaginären Einheit.

Die fertigen Programme müssen zum Abgabetermin per e-mail an Ihren Tutor geschickt werden. Zusätzlich muss der Programmcode ausgedruckt der Abgabe beigelegt werden. Denken Sie daran, die zu den Programmieraufgaben gestellten Fragen zu beantworten.

Das ist das letzte Übungsblatt der ersten Semesterhälfte