Technische Universität Berlin Sommersemester 2009
Fakultät II; Institut für Mathematik
Prof. Dr. Günter Bärwolff, Ira Neitzel 05. Juni 2009

Einführung in die Numerische Mathematik

8. Übungsblatt

Abgabe am 17. Juni 2009 **vor** der Vorlesung

Hausaufgaben

Aufgabe 8.1

Gegeben sei eine Gewichtsfunktion $\rho(x)$ und der Vektorraum der Polynome. Beweisen Sie, dass durch $\langle p, q\rangle_\rho := \int\limits_a^b p(x)q(x)\rho(x)\,dx$ ein Skalarprodukt und durch $\|p\|_\rho^2 = \langle p, p\rangle_\rho = \int\limits_a^b p(x)p(x)\rho(x)\,dx$ eine Norm definiert ist.

Aufgabe 8.2 **8 Punkte**

Bei der Rombergintegration werden zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Trapezsummen $\mathcal{T}(h_j)$ $(j = 0, 1, \ldots)$ zu den Schrittweiten

$$h_j = (b-a)/2^j \qquad j = 0, 1, \ldots$$

(Rombergfolge) auf $h = 0$ extrapoliert. Mit $P_{k,\ldots,k+m}$ wird das interpolierende Polynom zu den Stützstellen $h_k^2, \ldots, h_{k+m}^2$ bezeichnet:

$$P_{k,\ldots,k+m}(h_j^2) = \mathcal{T}(h_j), \quad \text{für} \quad k \le j \le k+m$$

und der Wert des Polynoms bei 0 mit $T_{k,\ldots,k+m} = P_{k,\ldots,k+m}(0)$.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Schemas von Neville-Aitken eine Rekursionsbeziehung für $T_{k,\ldots,k+m}$.

(b) Zeigen Sie, dass der Wert $T_{0,1}$ der Simpsonregel entspricht.

(c) Zeigen Sie, dass der Wert $T_{0,1,2}$ der Milneregel entspricht.

Programmieraufgabe 8 **15 Punkte**

Schreiben Sie ein Programm `romberg` zur Berechnung eines Integrals mit Hilfe der Extrapolation der Trapezsumme mit den durch die Rombergfolge gegeben Schrittweiten (vgl. Aufgabe 8.2).

Berechnen Sie dazu für festes m^* und und festes $k_{\max}$ für $k = 0, 1, \ldots$ die Werte

$$T_{k-m,\ldots,k} \quad \text{für} \quad m = 0, 1, \ldots, \min\{k, m^*\}. \tag{$*$}$$

Bei $k =: k^*$ soll abgebrochen werden, falls

$$m^* + 1 \leq k < k_{\max}, \quad |T_{k-m^*,\ldots,k} - T_{k-m^*+1,\ldots,k}| \leq \epsilon$$

oder $k = k_{\max}$ ist. Das Integral wird durch den Wert $T_{k^*-m^*,\ldots,k^*}$ approximiert.

Die Schnittstelle des Programms soll durch

```
s = romberg(fun,a,b,epsilon,mstern,kmax,info)
```

gegeben sein mit der Eingabe

`fun`	Zeichenkettekonstante der MATLAB-Funktion für f mit Schnittstelle `y = f(x)`.
`a`	Skalar Anfang des Integrationsintervalls a
`b`	Skalar Ende des Integrationsintervalls b
`epsilon`	Skalar für die Genauigkeit ϵ.
`mstern`	Skalar für die Anzahl der Interpolationspunkte m^*.
`kmax`	Skalar für die maximale Tiefe $k_{\max}$.
`info`	Skalar für die Ausgabe von Zusatzinformationen (siehe unten).

und der Rückgabe

`s`	Skalar des approximierten Integralwerts $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Hinweis: Bei der Berechnung der Trapezsumme mit einer feineren Schrittweite soll das Ergebnis der vorangegangenen Berechnung verwendet werden.

Berechnen Sie die vier bestimmten Integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+16x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{\pi/2} \left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 \sin(3x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{|\cos(2x)|}\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe des Algorithmus `romberg` mit den Konstanten $\epsilon = 10^{-8}$, $m^* = 4$ und $k_{\max} = 13$. Ergänzen Sie dabei den Code, so dass für `info`$= 1$ die Werte aus Gleichung $(*)$ für $k = 0, 1, \ldots, k^*$ jeweils auf acht Nachkommastellen in einem geeigneten Tableau ausgegeben werden und geben Sie dieses für jedes der Integrale aus.

Hinweis: In MATLAB wird durch das Kommando `disp(sprintf('%15.8e',zahl))` die Variable `zahl` als Gleitkommazahl in Exponentenschreibweise mit 8 Nachkommastellen und einer Gesamtbreite von 15 Stellen ausgegeben. Siehe auch `doc sprintf`.

Die fertigen Programme müssen zum Abgabetermin per e-mail an Ihren Tutor geschickt werden. Zusätzlich muss der Programmcode ausgedruckt der Abgabe beigelegt werden. Denken Sie daran, die zu den Programmieraufgaben gestellten Fragen zu beantworten.