Technische Universität Berlin Sommersemester 2009
Fakultät II; Institut für Mathematik
Prof. Dr. Günter Bärwolff, Ira Neitzel 12. Juni 2009

Einführung in die Numerische Mathematik

9. Übungsblatt

Abgabe am 24. Juni 2009 **vor** der Vorlesung

Hausaufgaben

Aufgabe 9.1 **4 Punkte**

Sei $a > 0$ eine reelle Zahl. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so dass für alle $x_0 \in I$ die Iteration

$$x_{n+1} = x_n(2 - ax_n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

gegen $\dfrac{1}{a}$ konvergiert. Bestimmen Sie die Konvergenzordnung der Iteration.

Aufgabe 9.2 **5 Punkte**

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 0 \\ \frac{10x_1}{x_1 + 0.1} + 2x_2^2 &= 0\,, \end{aligned}$$

dessen eindeutig bestimmte Lösung $[\,x_1,\,x_2\,]^T = [\,0,\,0\,]^T$ ist.

1. Führen Sie ausgehend von dem Startvektor $[\,0,\,1\,]^T$ zwei Newton–Schritte durch.
2. Konvergiert das Newton–Verfahren in diesem Beispiel für alle genügend nahe an der Lösung liegenden Startvektoren ? Geben Sie eine maximale Teilmenge von $U_{0.1}(0) = \{\,[\,x_1,\,x_2\,]^T \;:\; \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 0.1\}$ an, so dass das Verfahren auf dieser Menge konvergiert.

Aufgabe 9.3 **6 Punkte**

Betrachtet wird das Fixpunktproblem

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.1x_1^2 + 0.1x_2^2 + 0.1x_3^2 \\ 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 \\ 0.1x_1x_2x_3 + 0.3 \end{bmatrix}$$

1. Zeigen Sie: Das Fixpunktproblem hat in $G = [0,1] \times [0,1] \times [0,2]$ genau eine Lösung $\bar{x}$ und das Fixpunktiterationsverfahren $x^{(n+1)} = \varphi(x^{(n)})$ konvergiert in der Maximumsnorm für alle Startwerte $x^{(0)} \in G$ gegen diese Lösung.
2. Wieviele Iterationsschritte sind höchstens erforderlich, um mit dem Fixpunktiterationsverfahren eine Näherung von $\bar{x}$ mit einem absoluten Fehler von höchstens $0.5 \cdot 10^{-6}$ in der Maximumsnorm zu gewinnen, wenn Sie bei $x^{(0)} = [0,0,0]^T$ starten?

Programmieraufgabe 9 **10 Punkte**

Schreiben Sie ein MATLAB-Programm `newton.m` für das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle einer Funktion $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dabei soll das Newton-Verfahren aufrufbar sein als

```
[x,X]=newton(f,df,x0,tol,nmax),
```

wobei `x0` ein Startwert ist, x die Approximation der Nullstelle von f, und X eine Matrix, deren Spalten die Folge der Iterierten $x^{(0)}, x^{(1)} \ldots$ enthalten. Der Parameter `f` bzw. `df` steht für die zu untersuchende Funktion und deren Ableitung. Das Verfahren soll abbrechen, sobald $\|f(x^{(k)})\|_2 + \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_2 <$ `tol` oder die Anzahl der Schritte `nmax` überschreitet.

Finden Sie mit Hilfe Ihres Programms eine Nullstelle zu

$$x + e^{-x} + y^3 = 0, \quad x^2 + 2xy - y^2 + \tan(x) = 0.$$

Die fertigen Programme müssen zum Abgabetermin per e-mail an Ihren Tutor geschickt werden. Zusätzlich muss der Programmcode ausgedruckt der Abgabe beigelegt werden. Denken Sie daran, die zu den Programmieraufgaben gestellten Fragen zu beantworten.