Technische Universität Berlin
Fakultät II; Institut für Mathematik
Prof. Dr. Günter Bärwolff, Ira Neitzel

Sommersemester 2009

26. Juni 2009

Einführung in die Numerische Mathematik

11. Übungsblatt

Abgabe am 08. Juli 2009 **vor** der Vorlesung

Hausaufgaben

Aufgabe 11.1 **7 Punkte**

Wozu sind implizite Verfahren zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen gut? Wir betrachten das Beispiel

$$y' = \lambda y, \quad t > 0, \quad y(0) = y_0.$$

(a) Bestimmen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems und beschreiben Sie das asymptotische Lösungsverhalten für $t \to \infty$ in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Berechnen Sie die Näherung, die sich bei Anwendung des *expliziten* Eulerverfahrens mit konstanter Schrittweite h ergibt. Für welche Werte von h stimmt das asymptotische Verhalten der Näherungslösung zumindest qualitativ mit dem der exakten Lösung überein?

(c) Lösen Sie Teil (b) für das *implizite* Eulerverfahren:

$$\begin{aligned} u_0 &= y_0 \\ u_{i+1} &= u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1}), \quad i = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Für welche Werte von h stimmt jetzt das asymptotische Verhalten der Näherungslösung zumindest qualitativ mit dem der exakten Lösung überein?

Betrachten Sie nun das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y, \quad t > 0, \quad y(0) = \alpha \tag{1}$$

für $y = (y_1, y_2)^T, \alpha \in \mathbb{R}^2$. Es sei $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 \ll 0$.

(d) Berechnen Sie die exakte Lösung. Welcher Teil der Lösung ist für $t \to \infty$ dominant?

(e) Welcher Teil der Lösung bestimmt bei der Anwendung des expliziten Eulerverfahrens die Wahl der Schrittweite, wenn die Näherungslösung sich qualitativ wie die exakte Lösung verhalten soll?

Aufgabe 11.2 **4 Punkte**

Die Inkrementfunktion eines Einschrittverfahrens sei durch

$$\phi(t, y, h, f) = f(t, y) + \frac{h}{2} g(t + ch, y + chf(t, y)) \ \text{mit}\ g(t, y) = f_t(t, y) + f_y(t, y) f(t, y),\ c \in \mathbb{R}$$

gegeben. Kann c so gewählt werden, dass dieses Verfahren von Konsistenzordnung 3 ist? Wenn ja, wie ist c zu wählen?

Aufgabe 11.3 **4 Punkte**

Reduzieren Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen durch Hinzunahme zusätzlicher Variablen auf ein System 1. Ordnung. Falls das entstandene System linear ist, schreiben Sie das System in Matrix-Vektor-Schreibweise.

(a) $y'''(t) - (1+t)y''(t) - 3y'(t) = y(t)$

(b) $y''(t) - \frac{1}{t}y'''(t) = y(t)y'(t) - t^4\cos(t)$

Programmieraufgabe 10 **10 Punkte**

Schreiben Sie ein Programm, welches eine beliebige Differentialgleichung $y'(t) = f(t,y),\ y(t_0) = y_0$ mit einem expliziten Runge-Kutta-Verfahren in $[t_0, t_0 + a]$ löst, welches durch die Butcher-Tabelle

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \alpha_2 & \beta_{2,1} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \alpha_s & \beta_{s,1} & \cdots & \beta_{s,s-1} & \\ \hline & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{s-1} & \gamma_s \end{array} \tag{2}$$

definiert ist. Der Aufruf des Programms soll mit

```
[h,t,u]=exp_runge_kutta(fun,B,t0,y0,N,a)
```

erfolgen. Dabei ist `fun` der Name einer Matlab-Funktion `z=fun(t,y)` die die rechte Seite der Differentialgleichung bestimmt und auch Vektoren als Übergabeparameter akzeptieren soll. Die Butchertabelle `B` soll in Form der Matrix (2) übergeben werden. Weitere Eingabeparameter sind die untere Intervallgrenze `t0`=t_0, der Anfangswert `y0`=y_0, die Schrittzahl `N`=N und die Intervallänge `a`=a. Rückgabewerte sollen die gewählte konstante Schrittweite `h`=$h = a/N$, der Vektor der Stützstellen `t`=$\mathbf{t} = [t_0, t_1, ..., t_N]$ und der Vektor der zugehörigen approximierten Lösung `u`=$\mathbf{u} = [u_0, u_1, ..., u_N]$ sein.
Die Butchertabelle soll in der Routine `butcher.m` bestimmt werden

`B=butcher(i)`,

wobei `i` bestimmt, welche Tabelle generiert werden soll (`i`$= 1$ - explizites Euler-Verfahren, `i`$= 2$ - modifiziertes Euler-Verfahren, `i`$= 3$ - Verfahren von Heun, `i`$= 4$ - klassisches Runge-Kutta-Verfahren).

Bestimmen Sie mit Ihrem Programm die numerische Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \dot{y} = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

bei Vorgabe des Anfangswertes $(x(0), y(0))^T = (1,0)^T$.

Approximieren Sie die Lösung für $a = 2\pi$ mit $N = 5,\ 10,\ 100,\ 1000$ Schritten.

Stellen Sie für jede Schrittzahl N die erste Komponente aller approximierten Lösungen und der exakten Lösung

$(\cos(t), -\sin(t))^T$ der Testaufgabe in einem Plot und die zweite Kompoenente aller Lösungen in einem zweiten Plot dar. Erstellen Sie au?erdem für jedes N einen logarithmischen Fehlerplot für jede Komponente, indem Sie mit dem Befehl `semilogy` die Fehler zwischen der exakten Lösung y und allen approximierten Lösungen u plotten.

Die fertigen Programme müssen zum Abgabetermin per e-mail an Ihren Tutor geschickt werden. Zusätzlich muss der Programmcode ausgedruckt der Abgabe beigelegt werden. Denken Sie daran, die zu den Programmieraufgaben gestellten Fragen zu beantworten.