Technische Universität Berlin Sommersemester 2009
Fakultät II; Institut für Mathematik
Prof. Dr. Günter Bärwolff, Ira Neitzel 08. Juli 2009

Einführung in die Numerische Mathematik

12. Übungsblatt

keine Abgabe

Wiederholung

Dieses Übungsblatt dient der Wiederholung und muss nicht abgegeben werden. In den Tutorien in der Woche vom 13.07.09 bis 17.07.09 können ausgewählte Aufgaben gerechnet und Fragen – zu diesen und anderen Themen – geklärt werden. Bitte beachten Sie, dass dieses Blatt nicht alle klausurrelevanten Inhalte umfaßt.

Aufgabe 12.1

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sind für $0 < \varepsilon < 1$ zwei Geraden gegeben

$$\begin{aligned} y &= -\varepsilon x + b, \\ y &= \varepsilon x - b. \end{aligned}$$

1. Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Geraden.
2. Man schreibe das Gleichungssystem in Matrixformulierung $A\binom{x}{y} = \binom{b_1}{b_2}$ und berechne die Kondition von A bzgl. der Zeilensummennorm.
3. Man substituiere im Gleichungssystem εx durch $\tilde{x}$ und diskutiere erneut die Kondition der zugehörigen Matrix.

Aufgabe 12.2

Die dreimal stetig differenzierbare Funktion $f : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ habe in $\bar{x} \in (a, b)$ eine einfache Nullstelle. Zeigen Sie, dass das *Steffensen-Verfahren*

$$x_{(n+1)} = x_n - \frac{x_n - (x_n - f(x_n))}{f(x_n) - f(x_n - f(x_n))} f(x_n)$$

lokal quadratisch gegen die Nullstelle $\bar{x}$ konvergiert.

Aufgabe 12.3

Betrachten Sie das lineare Gleichungssytem $Ax = b$ mit der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Spektralradien der Fehlerfortpflanzungsmatrizen des Jacobi-Verfarens und des Gauß-Seidel-Verfahrens. Was kann mann über die Konvergenz der Verfahren sagen?

Aufgabe 12.4

Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b in der Funktion $p(x) = ax + b$, so dass der Fehler

$$\int_{-1}^{1} |p(x) - x^2|^2 dx$$

minimal wird.

Aufgabe 12.5

Sei $P(x)$ ein Polynom dritten Grades, das die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{a^2 - x}$$

in den Stützstellen $\{-4,\ -3,\ -2,\ -1\}$ auf dem Intervall $[\,-4,\ -1\,]$ interpoliert. Bestimmen Sie alle Werte von a, so dass $|f(x) - P(x)| \leq 10^{-5}$.

Aufgabe 12.6

Bestimmen Sie die Parameter der Butcher-Tabelle eines 2-stufigen expliziten Runge-Kutta-Verfahrens so, dass es von der Konsistenzordnung p=2 ist und der Fehlerterm in h^2 der Taylorentwicklung kleinstmögliche Konstanten annimmt.