

## 4 Optimale Steuerung

Für ein allgemeines nichtlineares System wie in Definition 1.2, also

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), & x(t_0) &= x^0, & t &\in [t_0, t_f] \\ y &= g(t, x, u) \end{aligned} \quad (4.1)$$

suchen wir eine *optimale Steuerung*  $u \in \mathcal{U}_{ad}$ , die das Kostenfunktional  $\mathcal{J} : \mathcal{U}_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{J}(u) = h_e(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} h(t, x, y, u) dt, \quad (4.2)$$

minimiert. Dabei ist  $h$  eine geeignet zu wählende Funktion, die den Zustands-, Ausgangs- und Eingangsgrößen Kosten zuweist, während  $h_e$  die Abweichung vom gewünschten Endzustand  $\hat{x}$  bewertet.

Um auch hier zuzulassen, daß wir mit einem asymptotischen Erreichen des Ziels zufrieden sind, also als Aufgabenstellung eine Stabilisierung des Systems vorgeben, wird  $t_f = \infty$  zugelassen. Zunächst betrachten wir jedoch den Fall  $t_f < \infty$ , der Fall eines unendlichen Zeithorizonts ergibt sich dann aus einer asymptotischen Betrachtung.

**Bemerkung 4.1** *Wählt man  $h \equiv 1$ ,  $h_e \equiv 0$ , so ergibt sich das Problem,  $t_f$  zu minimieren. Diese Aufgabe nennt man zeitoptimale Steuerung, es gilt also, die Steuerung zu finden, die das System in kürzest möglicher Zeit in den gewünschten Zustand bringt. Diese Aufgabenstellung wird hier nicht weiter betrachtet.*

Der allgemeine Zugang zu Problemen der optimalen Steuerung beruht auf dem Lagrange'schen Formalismus: Möchte man ein Problem der Form

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} h(x) \\ \text{so daß } f(x) = 0 \end{aligned}$$

lösen, so definiert man die *Lagrange-Funktion*

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -h(x) + \lambda^T f(x),$$

mit den *Lagrange-Multiplikatoren*  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  und entwickelt notwendige Optimalitätsbedingungen aus

$$\mathcal{L}_x = 0, \quad \mathcal{L}_\lambda = 0.$$

Analog verwendet man bei dynamischen Nebenbedingungen das *Hamilton-Prinzip*. Dazu definiert man in Analogie zu (4.1) eine *Hamilton-Funktion*. Für autonome Systeme mit  $h(x, y, u) \equiv h(x, u)$  ist diese definiert durch

$$\mathcal{H}(x, u, \mu) = -h(x, u) + \mu^T f(x, u), \quad (4.3)$$

wobei  $\mu : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$  die den Lagrange-Multiplikatoren entsprechende *Kozustandsfunktion* bezeichnet. Beachte, daß die dynamischen Nebenbedingungen damit als

$$\mathcal{H}_\mu = \dot{x}$$

geschrieben werden können.

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen ergeben sich dann aus dem folgenden Satz, der auf Pontryagin [24] zurückgeht und hier in der Form eines “Minimumsprinzips” wie in [23] angegeben ist, wobei zunächst  $h_e \equiv 0$  vorausgesetzt ist.

**Satz 4.2 (Pontryagin’sches Maximumprinzip)** *Sei  $u_* \in \mathcal{U}_{ad}$  und  $x_*(t) := x(t; u_*)$  die zugehörige Lösungstrajektorie von (4.1). Ist  $u_*$  optimal für (4.2), so erfüllt  $u_*$  die notwendigen Optimalitätsbedingungen*

$$(i) \quad \mathcal{H}(x_*, u_*, \mu) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{ad}} \mathcal{H}(x, u, \mu) \text{ für alle } t \in [t_0, t_f].$$

(ii) Die Kozustandsfunktion erfüllt die adjungierte Gleichung

$$\dot{\mu}(t) = -\mathcal{H}_x, \quad \text{d.h. } \dot{\mu}_j(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

(iii)  $\mu(t_f) = 0$  (Transversalitätsbedingung).

**Beweis:** Siehe [20, 23, 24].  $\square$

Der Fall  $h_e \neq 0$  kann auf obigen Satz zurückgeführt werden. Dazu verwendet man, daß

$$h_e(x(t_f)) - h_e(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_f} \nabla h_e(x(t)) \cdot \dot{x}(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} \nabla h_e(x(t)) \cdot f(x(t), u(t)) dt$$

woraus sich eine neue Kostenfunktion

$$\tilde{h}(x, u) = h(x, u) + \nabla h_e(x) \cdot f(x, u)$$

ergibt. Damit ist also  $\mathcal{J}(u) = h_e(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_f} \tilde{h}(x, u) dt$ . Da  $h_e(x(t_0))$  konstant ist, kann dieser Term in der Optimierung vernachlässigt werden, d.h. man arbeitet dann mit dem modifizierten Kostenfunktional

$$\tilde{\mathcal{J}}(u) = \int_{t_0}^{t_f} \tilde{h}(x, u) dt.$$

Ersetzt man nun  $h$  durch  $\tilde{h}$  in der Hamilton-Funktion, so kann man Satz 4.2 auf  $\tilde{\mathcal{J}}$  anwenden. Zu beachten ist dabei lediglich, daß sich die Transversalitätsbedingung zu

$$(iii)' \quad \mu(t_f) = \nabla h_e(x(t_f))$$

ändert. Außerdem sind natürlich die erforderlichen Glattheitsanforderungen an  $h_e$  zu überprüfen.

Im Folgenden betrachten wir wieder LTI Systeme wie in (1.3)–(1.4), d.h.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x^0, \\ y &= Cx, & t &\in [0, t_f]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Hierbei ist also

$$\begin{aligned} f(t, x, u) &= Ax + Bu, \\ g(t, x, u) &= Cx. \end{aligned}$$

Da  $y = Cx$  und damit  $h(t, x, y, u) = h(t, x, Cx, u) \equiv h(t, x, u)$ , werden wir hier o.B.d.A.  $C = I_n$  annehmen. Setzen wir dann

$$\begin{aligned} h(t, x, u) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x(t)^T & u(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \\ h_e(x) &= \frac{1}{2} x^T M x. \end{aligned}$$

so erhalten wir ein quadratisches Kostenfunktional  $\mathcal{J}$  und damit die folgende Aufgabenstellung.

**Definition 4.3 (Linear-quadratisches Optimalsteuerungsproblem)**

*Das Minimierungsproblem*

$$\begin{aligned} \min \mathcal{J}(u) &= \frac{1}{2} \left( x(t_f)^T M x(t_f) + \int_0^{t_f} \{x(t)^T Q x(t) + 2x(t)^T S u(t) + u(t)^T R u(t)\} dt \right) \\ &\text{unter der Nebenbedingung} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x^0,$$

heißt linear-quadratisches Optimalsteuerungsproblem.

In der Regelungstheorie nennt man das linear-quadratische Optimalsteuerungsproblem auch *linear-quadratisches Regelungsproblem* oder kurz *LQR Problem*. Im Folgenden werden wir diese Abkürzung ebenfalls verwenden.

**Bemerkung 4.4** *Wie man hier sofort sieht, ist die oben getroffene Vereinbarung  $C = I$  tatsächlich keine Einschränkung. Falls die Ausgänge im Kostenfunktional gewichtet werden sollen, hätte man bei einem quadratischen Zielfunktional Terme der Form*

$$y^T Q_y y + x^T Q_x x = x^T C^T Q_y C x + x^T Q_x x = x^T (C^T Q_y C + Q_x) x$$

und würde mit  $Q := C^T Q_y C + Q_x$  also genau ein Kostenfunktional der Form wie in (4.5) erhalten.

Das LQR Kostenfunktional bewertet also folgende Größen:

- Die Abweichung des Endzustandes  $x(t_f)$  vom Ziel  $\hat{x}$  mit Hilfe des Terms  $x(t_f)^T M x(t_f)$ .

- Das Einschwingverhalten des Zustands durch  $\int_0^{t_f} x^T Q x dt$ .
- Die (Energie-)Kosten, die für  $u$  aufgewendet werden, durch den Term  $\int_0^{t_f} u^T R u dt$ .

Im Beispiel 1.4 würde also  $M$  die Abweichung von  $\varphi(t_f) = \pi$  und  $\dot{\varphi}(t) = 0$  gewichten, der erste Term im Kostenfunktional kann dazu dienen, möglichst ein oszillatorisches Einschwingverhalten zu verhindern, während der letzte Term im Kostenfunktional die Energiekosten für das angelegte Trägheitsmoment bewertet.

Der gemischte Term  $x^T S u$  ist meist nicht vorhanden. Er tritt z.B. dann auf, wenn die Ausgangsgleichung einen Durchgriffsterm  $Du$  wie in (1.4). enthält. Dann hat man wie in Bemerkung 4.4

$$\begin{aligned} y^T Q_y y + x^T Q_x x &= x^T C^T Q_y C x + x^T Q_x x + u^T D^T Q_y C x + x^T C^T Q_y D u \\ &= x^T (C^T Q_y C + Q_x) x + 2x^T C^T Q_y D u \\ &=: x^T Q x + 2x^T S u. \end{aligned}$$

Durch Anwendung des Pontryagin'schen Maximumprinzips erhält man nun die notwendigen Optimalitätsbedingungen. Der Satz kann direkt bewiesen werden ohne Satz 4.2 zu verwenden, wobei die Beweisstruktur dem allgemeineren Beweis folgt. Im Folgenden sei  $\mathcal{U}_{ad}$  die Menge der auf  $[0, t_f]$  stückweise stetigen Funktionen, der Beweis für  $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{L}_2([0, t_f], \mathbb{R}^m)$  geht analog.

**Satz 4.5** *Betrachte das Optimalsteuerungsproblem (4.5). Sei  $u_* \in \mathcal{U}_{ad}$  eine optimale Steuerung und sei  $x_*(t) = x(t, u_*)$  die zugehörige Lösungsstrajektorie.*

*Dann gibt es eine Kozustandsfunktion  $\mu(t) : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so daß  $x_*(t), \mu(t), u_*(t)$  das lineare Randwertproblem*

$$\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ Q & A^T & S \\ S^T & B^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \mu(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\mu}(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

mit Randbedingungen

$$x(0) = x^0, \quad \mu(t_f) = Mx(t_f) \quad (4.7)$$

lösen.

Beachte, daß  $\dot{u}$  hier nur formal eingeht,  $u$  also nicht differenzierbar vorausgesetzt werden muß.

**Beweis:** Der Beweis folgt im Wesentlichen dem Ansatz des "Verschwindens der ersten Variation" aus der Variationsrechnung. Sei dazu  $u_*$  die Optimalsteuerung. Betrachte eine Störung erster Ordnung

$$u(t) = u_*(t) + \varepsilon v(t)$$

mit  $u(t) \in \mathcal{U}_{ad}$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ . Damit wird die Nebenbedingung in (4.5) zu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_*(t) + \varepsilon Bv(t)$$

mit Lösungstrajektorie (siehe Kapitel 2)

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-s)}B(u_*(s) + \varepsilon v(s)) ds \\ &= x_*(t) + \varepsilon \underbrace{\int_0^t (e^{A(t-s)}Bv(s)) ds}_{=:z(t)} \\ &= x_*(t) + \varepsilon z(t). \end{aligned}$$

Dabei erfüllt  $z(t)$  die lineare, inhomogene Differentialgleichung

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bv(t), \quad z(0) = 0. \quad (4.8)$$

Wir führen nun den Vektor  $\mu(t) \in \mathbb{R}^n$  und die Hamilton-Funktion  $\mathcal{H}(x, u, \mu)$  ein durch

$$\mathcal{H}(x, u, \mu) = \frac{1}{2} (x^T(t)Qx(t) + 2x(t)^T Su(t) + u(t)^T Ru(t)) + \mu(t)^T (Ax(t) + Bu(t))$$

Damit schreiben wird das Kostenfunktional um zu

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Mx(t_f) + \int_0^{t_f} (\mathcal{H}(x, u, \mu) - \mu^T \dot{x}) dt.$$

Analog erhalten wir für  $u_*, x_*$

$$\mathcal{J}(u_*) = \frac{1}{2}x_*^T(t_f)Mx_*(t_f) + \int_0^{t_f} (\mathcal{H}(x_*, u_*, \mu) - \mu^T \dot{x}_*) dt.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(u_*) &= \frac{1}{2} (x(t)^T Mx(t) - x_*(t)^T Mx_*(t)) \Big|_{t=t_f} \\ &\quad + \int_0^{t_f} (H(x, u, \mu) - H(x_*, u_*, \mu)) dt \\ &\quad + \int_0^{t_f} \mu^T \underbrace{(\dot{x}_* - \dot{x})}_{=-\varepsilon \dot{z}} dt \end{aligned} \quad (4.9)$$

Wir betrachten nun die drei Terme der rechten Seite von (4.9) separat. Für den ersten Term erhält man durch Einsetzen von  $x = x_* + \varepsilon z$

$$x^T Mx - x_*^T Mx_* = x_*^T Mx_* + 2\varepsilon x_*^T Mz + \varepsilon^2 z^T Mz - x_*^T Mx_* = 2\varepsilon x_*^T Mz + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Die aufwendigste Behandlung erfordert der zweite Term.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, u, \mu) - \mathcal{H}(x_*, u_*, \mu) &= \frac{1}{2} (x^T Qx + 2x^T Su + u^T Ru) + \mu^T (Ax + Bu) \\ &\quad - \frac{1}{2} (x_*^T Qx_* + 2x_*^T Su_* + u_*^T Ru_*) - \mu^T (Ax_* + Bu_*). \end{aligned}$$

Wir setzen jetzt

$$u = u_* + \varepsilon v, \quad x = x_* + \varepsilon z$$

ein und erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, u, \mu) - \mathcal{H}(x_*, u_*, \mu) &= \frac{1}{2} \{ x_*^T Q x_* + 2\varepsilon x_*^T Q z + \varepsilon^2 z^T Q z - x_*^T Q x_* \\ &\quad + 2(\varepsilon^2 z^T S v + x_*^T S u_* + \varepsilon(x_*^T S v + z^T S u_*) - x_*^T S u_*) \\ &\quad + \varepsilon^2 v^T R v + u_*^T R u_* + 2\varepsilon(u_*^T R v) - u_*^T R u_* \} \\ &\quad + \mu^T A x_* + \varepsilon \mu^T A z + \mu^T B u_* + \varepsilon \mu^T B v - \mu^T A x_* - \mu^T B u_* \\ &= \varepsilon(x_*^T Q z + x_*^T S v + u_*^T S^T z + u_*^T R v + \mu^T A z + \mu^T B v) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon(\{x_*^T Q + u_*^T S^T + \mu^T A\}z + \{x_*^T S + u_*^T R + \mu^T B\}v) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Weiter gilt für den letzten Term in (4.9) mit partieller Integration

$$- \int_0^{t_f} \varepsilon \mu^T \dot{z} dt = -\varepsilon \mu^T z \Big|_0^{t_f} + \varepsilon \int_0^{t_f} \dot{\mu}^T z dt = -\varepsilon \mu^T(t_f) z(t_f) + \varepsilon \int_0^{t_f} \dot{\mu}^T z dt$$

wobei wir verwenden, daß  $z(0) = 0$  wegen (4.8).

Zusammen erhalten wir also

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(u_*) &= \varepsilon \left( \int_0^{t_f} (\{x_*^T Q + u_*^T S^T + \mu^T A + \dot{\mu}^T\}z + \{x_*^T S + u_*^T R + \mu^T B\}v) dt \right. \\ &\quad \left. - \mu^T(t_f) z(t_f) + x_*^T(t_f) M z(t_f) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Notwendig für ein Minimum von  $\mathcal{J}$  ist nun das Verschwinden aller Richtungsableitungen von  $\mathcal{J}$  von  $u_*$  aus, d.h.,

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{J}(u_* + \varepsilon v) - \mathcal{J}(u_*)) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Wählt man  $\mu$  als Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung

$$\dot{\mu}(t) = -(A^T \mu(t) + Q x_* + S u_*) \quad (4.11)$$

mit „Endbedingung“

$$\mu(t_f) = M x_*(t_f) \quad (4.12)$$

dann ergibt sich aus (4.10) notwendigerweise

$$x_*^T S + u_*^T R + \mu^T B \equiv 0 \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (4.13)$$

Fassen wir nun die Gleichungen (4.11), (4.12), (4.13) und die erste Gleichung in (4.4) zusammen, so erhalten wir das Zwei-Punkt-Randwertproblem (4.6),(4.7).  $\square$

**Bemerkung 4.6** Das Randwertproblem (4.6) ergibt sich auch, wenn man das Pontryagin'sche Maximumprinzip auf das LQR Problem anwendet. Die erste Zeile von (4.6) entspricht der Nebenbedingung, also  $\mathcal{H}_\mu = \dot{x}$ , die zweite Zeile ergibt sich aus der adjungierten Gleichung (Satz 4.2(ii)), während die letzte Zeile von (4.6) aus der notwendigen Bedingung für ein Minimum,

$$\mathcal{H}_u = 0,$$

resultiert. (Beachte dabei, daß  $u$  hier als unbeschränkt angenommen wird.)

Die Randbedingungen sind gerade der Anfangswert der dynamischen Nebenbedingung in (4.5) und die Transversalitätsbedingung in der Form (iii)' für nicht-verschwindende Funktion  $h_e$ .

Man beachte, daß zur Herleitung der notwendigen Optimalitätsbedingungen keine Bedingungen an die das Kostenfunktional definierenden Matrizen  $M, Q, R, S$  notwendig waren. Um nun hinreichende Optimalitätsbedingungen zu erhalten, verwendet man im Wesentlichen, daß  $\mathcal{J}_{uu} \geq 0$  für ein Minimum gelten muß. Daraus ergibt sich, daß  $M$  und  $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$  zumindest positiv semidefinit sein sollten.

Als hinreichende Optimalitätsbedingung erhält man dann den folgenden Satz.

**Satz 4.7** Seien  $x_*, \mu, u_*$  so gewählt, daß  $\begin{bmatrix} x_* \\ \mu \\ u_* \end{bmatrix}$  das lineare Randwertproblem (4.6), (4.7) löst. Weiterhin gelte, daß  $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$ ,  $M$  positiv semidefinit sind.

Dann gilt

$$\mathcal{J}(u) \geq \mathcal{J}(u_*) \quad (4.14)$$

für alle  $u \in \mathcal{U}_{ad}$ .

**Beweis:** Wir gehen hier vor wie bei konvexer Optimierung. Definiere dazu

$$\Phi(s) = \mathcal{J}(su_*(t) + (1-s)v(t)).$$

Beachte, daß sich aus der Linearität von  $\dot{x} = Ax + Bu$  durch Einsetzen von  $u = su_* + (1-s)v$  die Lösungstrajektorie  $x = sx_* + (1-s)z$  ergibt, wobei  $z$  die zu  $v$  gehörende Lösung von (4.4) ist.

Die Behauptung des Satzes ist äquivalent zu der Aussage, daß  $\Phi(s)$  sein Minimum bei  $s = 1$  annimmt für alle  $x(t), u(x)$  welche (1.3) erfüllen. Da  $\Phi(s)$  quadratisch in  $s$  ist, hat also  $\Phi(s)$  ein Minimum für  $s = 1$  genau dann, wenn

$$\left. \frac{d\Phi}{ds} \right|_{s=1} = 0, \quad \left. \frac{d^2\Phi}{ds^2} \right|_{s=1} \geq 0.$$

Aus der Bedingung an die erste Ableitung folgt mit der für jede quadratische Form mit  $K = K^T$  gültigen Identität

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{2} (sq + (1-s)p)^T K (sq + (1-s)p) \right) \right|_{s=1} \\ &= \left. (sq^T Kq - sp^T Kq + (1-s)p^T Kq - (1-s)p^T Kp) \right|_{s=1} \\ &= q^T Kq - p^T Kq = (q-p)^T Kq \end{aligned}$$

der folgende Ausdruck:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\Phi}{ds} \right|_{s=1} &= (x_* - z)^T M x_* \Big|_{t=t_f} \\ &+ \int_0^{t_f} \{ (x_* - z)^T Q x_* + u_*^T S^T (x_* - z) + (u_* - v)^T S^T x_* + (u_* - v)^T R u_* \} dt \end{aligned} \quad (4.15)$$

Multipliziert man die zweite Gleichung von (4.6) von links mit  $x_*^T$ , setzt dann die erste und anschließend die dritte Gleichung von (4.6) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} x_*^T Q x_* &= -x_*^T A^T \mu - x_*^T S u_* - x_*^T \dot{\mu} \\ &= u_*^T B^T \mu - \dot{x}_*^T \mu - x_*^T S u_* - x_*^T \dot{\mu} \\ &= -u_*^T S^T x_* - u_*^T R u_* - \dot{x}_*^T \mu - x_*^T S u_* - x_*^T \dot{\mu} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Analog ergibt sich nach Multiplikation mit  $z^T$

$$\begin{aligned} z^T Q x_* &= -z^T A^T \mu - z^T S u_* - z^T \dot{\mu} \\ &= v^T B^T \mu - \dot{z}^T \mu - z^T S u_* - z^T \dot{\mu} \\ &= -v^T S^T x_* - v^T R u_* - \dot{z}^T \mu - z^T S u_* - z^T \dot{\mu} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Einsetzen von (4.16), (4.17) in (4.15) ergibt

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\Phi}{ds} \right|_{s=1} &= (x_* - z)^T M x_* \Big|_{t=t_f} + \int_0^{t_f} (z^T \dot{\mu} + \dot{z}^T \mu - x_*^T \dot{\mu} - \dot{x}_*^T \mu) dt \\ &= (x_*(t) - z(t))^T M x_*(t) \Big|_{t=t_f} + z^T(t) \mu(t) \Big|_{t=0}^{t=t_f} - x_*^T(t) \mu(t) \Big|_{t=0}^{t=t_f} \end{aligned}$$

Nun gilt nach (4.7)  $z(0) = x^0 = x_*(0)$  und  $\mu(t_f) = M x_*(t_f)$ , also  $\left. \frac{d\Phi}{ds} \right|_{s=1} = 0$ .

Mit der Identität

$$\frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{2} (sq + (1-s)p)^T K (sq + (1-s)p) \right) = (q-p)^T K (q-p)$$

für  $K = K^T$  gilt für die zweite Ableitung von  $\Phi$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\Phi}{ds^2} \right|_{s=1} &= (x_* - z)^T M (x_* - z) \Big|_{t=t_f} \\ &+ \int_0^{t_f} [(x_* - z)^T, (u_* - v)^T] \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_* - z \\ u_* - v \end{bmatrix} dt \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

wobei die positiv Semidefinitheit folgt, da  $M$ ,  $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$  nach Voraussetzung positiv semidefinit sind.  $\square$

Wir haben also den Zusammenhang hergestellt zwischen der Lösung des optimalen Steuerungsproblems und der Lösung eines linearen 2-Punkt Randwertproblems. Im Prinzip könnten wir also die optimale Steuerung  $u_*$  des LQR Problems durch Lösen von (4.6), (4.7) erhalten.

Numerisch wesentlich einfacher und günstiger ist jedoch der im Folgenden beschriebene Weg.



## Lösung des LQR Problems durch Riccatigleichungen

Die Voraussetzungen von Satz 4.7 implizieren, daß auf jeden Fall  $R \geq 0$  im Kostenfunktional gewählt werden sollte. In der Regel hat man sogar  $R > 0$ . Sonst gibt es kostenfreie Steuerungsparameter, was meist physikalisch nicht sinnvoll ist. Wir wollen uns im Folgenden also auf den Fall einer positiv definiten Gewichtsmatrix für die Steuerung beschränken. In diesem Fall ist  $R$  invertierbar und die dritte Gleichung in (4.6) kann nach  $u$  aufgelöst werden. Man erhält damit

$$u(t) = -R^{-1}(S^T x(t) + B^T \mu(t)). \quad (4.18)$$

Damit kann man  $u$  aus dem Randwertproblem (4.6) eliminieren und erhält

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x \\ \mu \end{bmatrix}, \quad x(0) = x^0, \quad \mu(t_f) = Mx(t_f), \quad (4.19)$$

wobei

$$H = \begin{bmatrix} A - BR^{-1}S^T & -BR^{-1}B^T \\ -(Q - SR^{-1}S^T) & -(A - BR^{-1}S^T)^T \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Im Folgenden setzen wir zur Vereinfachung der Schreibweise

$$A := A - BR^{-1}S^T, \quad G := BR^{-1}B^T, \quad Q := Q - SR^{-1}S^T, \quad (4.21)$$

so daß  $Ax + Bu$  in dieser Schreibweise mit (4.18) zu  $Ax - G\mu$  wird und wir  $H = \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$  schreiben können.

**Definition 4.8**  $H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  heißt Hamiltonisch, falls

$$(HJ) = (HJ)^T, \quad \text{wobei } J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Aus (4.22) ergibt sich sofort, daß Hamiltonische Matrizen eine explizite Blockstruktur besitzen.

**Lemma 4.9**  $H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  ist Hamiltonisch genau dann, wenn

$$H = \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad \text{wobei } G = G^T, \quad Q = Q^T.$$

D.h. also, daß (4.19) ein Randwertproblem für eine lineare Differentialgleichung mit Hamiltonischer Koeffizientenmatrix darstellt. Einige Eigenschaften Hamiltonischer Matrizen werden wir später noch näher untersuchen.

Mit dem Ansatz  $\mu(t) = X(t)x(t)$  erhält man aus (4.19) und mit

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= \dot{X}x + X\dot{x}, \\ \mu(t_f) &= X(t_f)x(t_f) \end{aligned}$$

die “Endbedingung”  $X(t_f) = M$  sowie

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - G\mu = Ax - GXx = (A - GX)x, \\ \dot{\mu} &= -Qx - A^T\mu = -Qx - A^TXx \\ &= \dot{X}x + X\dot{x} = \dot{X}x + XAx - XGXx.\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung erhalten wir

$$\dot{X}x = -(Q + A^TX + XA - XGX)x.$$

Da diese Gleichung für alle  $t \in [0, t_f]$  erfüllt sein muß, ergibt sich aus der Variation von  $x$ , daß  $X$  die *Matrix-Riccati-Differentialgleichung*

$$\dot{X}(t) = -\mathcal{R}(X(t)) := -(Q + A^TX(t) + X(t)A - X(t)GX(t)), \quad t \in [0, t_f] \quad (4.23)$$

mit Endbedingung

$$X(t_f) = M \quad (4.24)$$

erfüllen muß.

Man kann zeigen, daß (4.23), (4.24) auf  $[0, t_f]$  eine eindeutige Lösung besitzt. Da mit  $X$  auch  $X^T$  Lösung ist, folgt aus der Eindeutigkeit, daß  $X(t) = X(t)^T$  für alle  $t \in [0, t_f]$ . Weiter kann man zeigen, daß  $X(t)$  auf dem gesamten Intervall positiv semidefinit ist. (Die Beweise findet man z.B. in [15].)

Insgesamt erhält man das folgende Resultat, welches man auch für LTV Systeme zeigen kann (siehe [15]).

**Satz 4.10** *Falls  $R > 0$ , so gilt unter den Voraussetzungen von Satz 4.7, daß die optimale Steuerung  $u_*$ , die das LQR Problem (4.5) löst, gegeben ist durch*

$$u_*(t) = -R^{-1}(S^T + B^TX_*(t))x_*(t) \quad \forall t \in [0, t_f], \quad (4.25)$$

wobei  $X_*$  die eindeutige Lösung der Riccati-Differentialgleichung (4.23) mit Endbedingung (4.24) ist.

Die “optimalen Kosten” betragen

$$\mathcal{J}(u_*) = \frac{1}{2}(x^0)^T X_*(0)x^0. \quad (4.26)$$

**Beweis:** Die Form der optimalen Steuerung (4.25) ergibt sich direkt aus dem Randwertproblem (4.6)–(4.7) und dem Einsetzen von  $\mu = X_*x_*$  in (4.18).

Die optimalen Kosten erhält man durch Betrachtung der “Wertefunktion”<sup>3</sup>

$$V(x(t)) := x(t)^T X(t)x(t),$$

---

<sup>3</sup>Der Begriff Wertefunktion kommt aus einem alternativen Ansatz zur Lösung von dynamischen Optimierungsproblemen, dem “Bellmann’schen Optimalitätsprinzip”, welches hier auf dieselbe Lösung (4.25) führt, aber auch im Fall nichtlinearer Systeme anwendbar ist.

wobei  $X$  die Lösung der Riccati-Differentialgleichung (4.23) ist. Es gilt durch Einsetzen von  $\dot{x} = Ax + Bu$ , (4.23) und (4.25)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x_*) &= \dot{x}_*^T X_* x_* + x_*^T \dot{X}_* x_* + x_*^T X_* \dot{x}_* = 2\dot{x}_*^T X_* x_* + x_*^T \dot{X}_* x_* \\
&= 2x_*^T A^T X_* x_* + 2u_*^T B^T X_* x_* - x_*^T (Q + A^T X_* + X_* A - X_* G X_*) x_* \\
&= -2X_* B R^{-1} B^T X_* - x_*^T Q x_* + x_*^T G x_* \\
&= -x_*^T Q x_* - x_*^T G x_*.
\end{aligned}$$

Damit kann man das Kostenfunktional für die optimale Steuerung schreiben als

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(u_*) &= \frac{1}{2} x_*^T(t_f)^T M x_*(t_f) - \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \frac{d}{dt} V(x_*)(t) dt \\
&= \frac{1}{2} \left( x_*^T(t_f)^T M x_*(t_f) - V(x_*(t)) \Big|_{t=0}^{t=t_f} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( x_*^T(t_f)^T M x_*(t_f) - x_*^T(t_f)^T X_*(t_f) x_*(t_f) + x_*(0)^T X_*(0) x_*(0) \right) \\
&= \frac{1}{2} x_*^T(0)^T X_*(0) x_*(0),
\end{aligned}$$

wobei zum Schluß noch die Endbedingung  $X(t_f) = M$  verwendet wurde.  $\square$

**Bemerkung 4.11** *Man beachte, daß die optimale Steuerung  $u_*$  in (4.25) als lineare Zustandsrückführung bzw. Feedback-Steuerung vorliegt. Man erhält also einen geschlossenen Regelkreis, obwohl dies aus dem Randwertproblem (4.6)–(4.7) nicht ersichtlich ist. Der Ansatz  $\mu = Xx$  erklärt sich allerdings aus der Zielstellung, eine Feedback-Steuerung zu erhalten. Das bedeutet, daß man im Fall einer bzgl. des LQR Problems optimalen Steuerung eine Regelung erhält (siehe Bemerkung 1.7).*

Damit hat man zur Lösung des LQR Problems nun eine Alternative, indem man das “Endwertproblem” für die Riccati-Differentialgleichung löst. Dazu kann man die Gleichung mit Hilfe des vec-Operators und des Kroneckerprodukts vektorisieren und Standardverfahren zur Lösung von Anfangswertaufgaben heranziehen, wobei man durch die Transformation  $t \rightarrow t_f - t$  aus dem Endwertproblem ein Anfangswertproblem machen kann. Sinnvoller ist hier allerdings der Einsatz von speziellen Verfahren für Riccati-Differentialgleichungen, die die gegebene Struktur ausnutzen [9, 10, 14].

### Unendlicher Zeithorizont: $t_f = \infty$

Wie bereits in der Einleitung diskutiert, reicht häufig eine asymptotische Erreichung des Steuerungsziels aus. Dies führt zu der Frage nach einer optimalen Stabilisierung hinsichtlich des Kostenfunktionals in (4.5) mit  $t_f = \infty$ , wobei wir jetzt  $M = 0$  setzen. Um eine Stabilisierung des Systems überhaupt erreichen zu können, müssen wir natürlich die Stabilisierbarkeit voraussetzen. Da wir auch hier wieder eine Lösung als Feedback-Steuerung

anstreben, legt (4.18) den Ansatz  $\mu(t) = Xx(t)$  für eine konstante Matrix  $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  nahe. Mit diesem Ansatz erhält man analog zum endlichen Fall

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - GX)x, \\ \dot{\mu} &= -Qx - A^T\mu = -Qx - A^TXx \\ &= X\dot{x} = X(A - GX)x. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Die letzte Gleichung ist nun äquivalent zu

$$(Q + A^TX + XA - XGX)x(t) = 0 \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Durch Variation von  $x$  erhält man als notwendige Bedingung, daß  $X$  die *algebraische Riccatigleichung* (kurz: *ARE* von *algebraic Riccati equation*)

$$0 = \mathcal{R}(X) := Q + A^TX + XA - XGX \tag{4.28}$$

erfüllen muß. Man beachte, daß im Gegensatz zur Riccati-Differentialgleichung, (4.28) unendlich viele Lösungen besitzen kann und sogar unsymmetrische Lösungen möglich sind. Die Struktur der Lösungsmenge von (4.28) ist Gegenstand zahlreicher Forschungsarbeiten und bisher am ausführlichsten in [16] beschrieben.

Wir werden im Folgenden sehen, daß wir eine bestimmte Lösung der ARE benötigen. Da die Lösungstrajektorie einer jeden Steuerung, die aus unserem Ansatz generiert wird, die lineare homogene Differentialgleichung (4.27) erfüllt, so daß sich die Lösung schreiben läßt als  $x(t) = e^{(A-GX)t}x^0$ , muß notwendigerweise (siehe Satz 1.6)

$$\Lambda(A - GX) \subset \mathbb{C}^-$$

gelten, da sonst keine Stabilisierung des Systems erreicht würde. Dies motiviert folgende Definition.

**Definition 4.12** *Ein Lösung  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  der ARE (4.28) heißt stabilisierend falls  $\Lambda(A - GX) \subset \mathbb{C}^-$ .*

Um also eine stabilisierende Feedback-Matrix  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit Hilfe des LQR Problems zu berechnen, benötigen wir eine stabilisierende Lösung der ARE, da

$$A - GX = A - BR^{-1}B^TX = A + BF, \quad \text{mit } F := -R^{-1}B^TX.$$

Es bleibt also zu zeigen, wie man die stabilisierende Lösung, im Folgenden mit  $X_*$  bezeichnet, berechnen kann. Sei dazu  $X$  eine (zunächst beliebige) Lösung der ARE (4.28) und  $T := \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ X & I_n \end{bmatrix}$ . Dann gilt für die Hamiltonische Matrix  $H$  aus (4.20) mit den Abkürzungen (4.21)

$$\begin{aligned} T^{-1}HT &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -X & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ X & I_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - GX & -G \\ -\mathcal{R}(X) & -(A - GX)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - GX & -G \\ 0 & -(A - GX)^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$H \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} (A - GX), \quad (4.29)$$

d.h.  $\Lambda(A - GX) \subset \Lambda(H)$  und die Spalten von  $\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$  spannen einen  $H$ -invarianten Unterraum zu diesen Spalten auf. Dies gilt für jede Lösung der ARE, für die stabilisierende Lösung benötigen wir also einen  $n$ -dimensionalen  $H$ -invarianten Unterraum zu den Eigenwerten in der linken Halbebene. Zunächst ist die Frage zu klären, ob solch ein Unterraum überhaupt existiert. Dazu benötigen wir einige Eigenschaften des Spektrums Hamiltonischer Matrizen.

**Lemma 4.13** *Ist  $H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  Hamiltonisch und  $\lambda \in \Lambda(H)$  mit zugehörigem Rechts-Eigenvektor  $x \in \mathbb{C}^{2n}$ , dann ist  $-\bar{\lambda} \in \Lambda(H)$  mit zugehörigem Links-Eigenvektor  $Jx$ , wobei*

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

**Beweis:** Es gilt nach Definition 4.8

$$\lambda x = Hx = HJJ^T x = (HJ)^T J^T x = J^T H^T J^T x$$

Multiplikation von links mit  $J^T$  und komplex-konjugiert Transponieren ergibt

$$-\bar{\lambda}(Jx)^* = (Jx)^* H,$$

womit die Behauptung folgt.  $\square$

Da bei reellen Matrizen mit  $\lambda$  auch  $\bar{\lambda}$  im Spektrum erhalten ist, treten Eigenwerte Hamiltonischer Matrizen immer in Quadrupeln  $\lambda, \bar{\lambda}, -\lambda, \bar{-\lambda}$  auf, es sei denn, es handelt sich um rein reelle oder imaginäre Eigenwerte, die in Paaren  $\lambda, -\lambda$  bzw.  $i\omega, -i\omega$  ( $\omega \in \mathbb{R}$ ) auftreten. Insgesamt können wir also das Spektrum Hamiltonischer Matrizen wie folgt schreiben:

$$\Lambda(H) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \cup \{-\lambda_1, \dots, -\lambda_n\}, \quad \operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (4.30)$$

Ein typisches Spektrum einer Hamiltonischen Matrix ist in Abbildung 3 dargestellt.

Damit eine stabilisierende Lösung der ARE existieren kann, folgt also aus (4.29), daß die zugehörige Hamiltonische Matrix keine Eigenwerte auf der imaginären Achse haben darf, da dann exakt  $n$  Eigenwerte von  $H$  in der linken Halbebene liegen und ein  $n$ -dimensionaler  $H$ -invarianten Unterraum zu diesen Eigenwerten existiert.

Dies kann man aber schon mit den minimalen Forderungen an ein geregeltes System sicherstellen, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 4.14** *Sei  $H = \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  Hamiltonisch, wobei  $(A, G)$  stabilisierbar,  $(A, Q)$  entdeckbar und  $G, Q \geq 0$  seien. Dann gilt*

$$\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0 \quad \text{für alle } \lambda \in \Lambda(H).$$

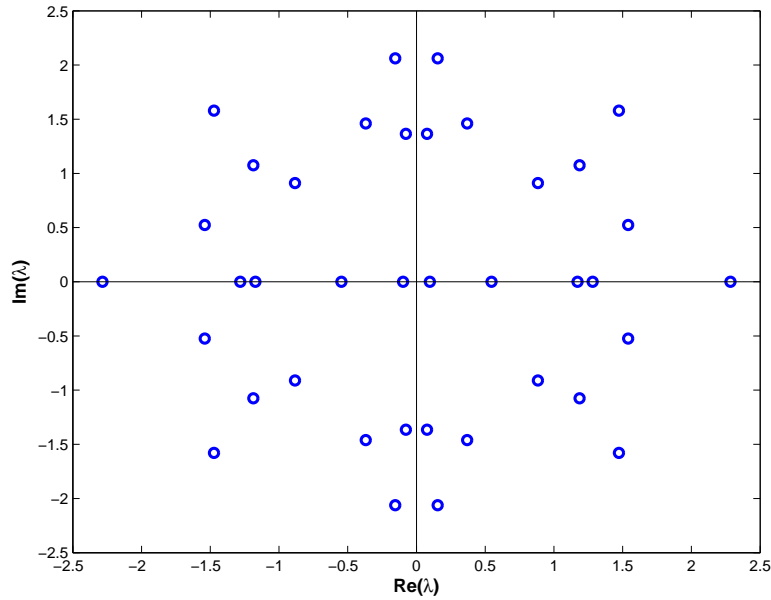


Abbildung 3: Typisches Spektrum einer Hamiltonischen Matrix

**Beweis:** Wir führen die Annahme, daß  $\lambda = \omega \in \Lambda(H)$  für ein  $\omega \in \mathbb{R}$  zum Widerspruch.

Wegen Lemma 4.13 können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $\omega \geq 0$ . Sei  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq 0$  mit  $x_1, x_2 \in \mathbb{C}^n$  ein Eigenvektor zu  $\omega$ , dann gilt

$$H \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Multiplikation von links mit  $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}^*$  führt zu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_2^* & x_1^* \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \underbrace{x_2^* A x_1}_{:=\alpha} - \underbrace{x_2^* G x_2}_{:=\gamma} - \underbrace{x_1^* Q x_1}_{:=\beta} - \underbrace{x_2^* A x_1}_{=-\alpha} \\ &= \begin{bmatrix} x_2^* & x_1^* \end{bmatrix} \omega \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \omega (\underbrace{x_2^* x_1}_{=:\zeta} + \underbrace{x_1^* x_2}_{=:\bar{\zeta}}) = 2\omega \operatorname{Re}(\zeta). \end{aligned}$$

Da  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$  ist der Realteil des ersten Ausdrucks

$$\gamma + \beta + \operatorname{Re}(\alpha - \bar{\alpha}) = \gamma + \beta,$$

während der Realteil des zweiten (rein-imaginären) Ausdrucks Null ist. Mit  $\beta, \gamma \geq 0$  wegen  $G, Q \geq 0$  folgt also  $\beta = \gamma = 0$  und daher

$$x_1^* Q = 0, \quad Q x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2^* G = 0, \quad G x_2 = 0.$$

Aus der ersten Gleichung in (4.31) erhält man

$$\omega x_1 = Ax_1 - Gx_2 = Ax_1$$

und damit

$$\begin{bmatrix} A - \omega I \\ Q \end{bmatrix} x_1 = 0. \quad (4.32)$$

Analog erhält man mit Hilfe der zweiten Gleichung aus (4.31)

$$x_2^* [A - \omega I, G] = 0. \quad (4.33)$$

Da zumindest entweder  $x_1 \neq 0$  oder  $x_2 \neq 0$  gelten muß, führt entweder (4.32) zum Widerspruch gegen die angenommene Entdeckbarkeit oder (4.33) zum Widerspruch gegen die Stabilisierbarkeit.  $\square$

Die stabilisierende Lösung der ARE erhält man nun wie folgt.

**Lemma 4.15** *Seien  $U = [u_1, \dots, u_n]$ ,  $V = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  so, daß  $\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} \right\}$  der  $H$ -invariante Unterraum zu  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  ist (mit der Notation wie in (4.30)). Ist  $U$  invertierbar, dann ist  $X_* = VU^{-1}$  die stabilisierende Lösung der ARE (4.28).*

**Beweis:** Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} T, \quad \Lambda(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Multiplikation der ersten Blockzeile dieser Gleichung mit  $U^{-1}$  von links ergibt

$$U^{-1}AU - U^{-1}GV = T.$$

Damit erhält man aus der zweiten Blockzeile

$$-QU - A^T V = VT = VU^{-1}AU - VU^{-1}GV.$$

Multipliziert man diese Gleichung von rechts mit  $U^{-1}$ , so folgt daß  $X_* = VU^{-1}$  die ARE (4.28) löst.

Weiter gilt

$$\text{Bild} \left( \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \right) = \text{Bild} \left( \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} U^{-1} \right) = \text{Bild} \left( \begin{bmatrix} I \\ X_* \end{bmatrix} \right).$$

Also ist  $X_*$  die stabilisierende Lösung der ARE.  $\square$

Man kann weiter zeigen, daß die stabilisierende Lösung der ARE eindeutig ist, falls sie existiert, und daß unter den Voraussetzungen von Satz 4.14  $U$  invertierbar, sowie  $VU^{-1}$  symmetrisch und positiv semidefinit ist. (Neben der stabilisierende Lösung existieren unter diesen Voraussetzungen noch endlich viele weitere Lösungen der ARE.) Damit erhält man insgesamt folgenden Satz über die Lösung des LQR Problems für  $t_f = \infty$ .

**Satz 4.16** Seien  $Q - SR^{-1}S^T$ ,  $G = BR^{-1}B^T$  positiv semidefinit,  $(A, B)$  stabilisierbar und  $(A - BR^{-1}S^T, Q - SR^{-1}S^T)$  entdeckbar. Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) Die ARE

$$Q + A^T X + XA - (S + XB)R^{-1}(S + XB)^T = 0$$

hat eine eindeutige stabilisierende Lösung  $X_* = X_*^T \geq 0$ .

b) Das LQR Problem (4.5) mit  $M = 0$ ,  $t_f = \infty$  hat eine eindeutige Lösung, die durch die Feedback-Steuerung

$$u_*(t) = -R^{-1}(S^T + B^T X_*)x_*(t) \quad (4.34)$$

gegeben ist. Die optimalen Kosten betragen

$$\mathcal{J}(u_*) = \frac{1}{2}(x^0)^T X_* x^0.$$

**Beweis:** Es ist lediglich zu beachten, daß  $(A, B)$  stabilisierbar ist genau dann, wenn  $(A - BR^{-1}S^T, BR^{-1}B^T)$  stabilisierbar ist, was aus Satz 2.18 folgt. Dann folgt Teil a) mit Satz 4.14 sowie den o.e. Zusatzüberlegungen, Teil b) folgt analog wie im Fall  $t_f < \infty$ .  $\square$

**Bemerkung 4.17** Wählt man  $t_f = \infty$ ,  $M = 0$ ,  $S = 0$ , in (4.5), so liefert jede Wahl  $Q > 0$ ,  $R > 0$  für ein stabilisierbares System eine stabilisierende Feedback-Matrix

$$F_* = F_*(Q, R) = -R^{-1}B^T X_*(Q, R),$$

wobei  $X_*(Q, R)$  die stabilisierende Lösung der zugehörigen ARE (4.28) ist. Bei geeigneter Wahl von  $Q, R$  erhält man in der Regel geschlossene Regelkreise, die weit weniger sensitiv gegenüber Störungen sind als solche, die über die Lösung des Polvorgabe-Problems oder mit dem Bass Algorithmus (Algorithmus 3.10) berechnet werden.

Um das LQR Problem zu lösen, benötigen wir also Verfahren zur numerischen Lösung der ARE (4.28).

## Numerische Lösung von algebraischen Riccatigleichungen

Der erste Ansatz folgt direkt aus dem Satz 4.14. Ist  $H$  diagonalisierbar, so könnte man  $U, V$  aus den Eigenvektoren zu  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  konstruieren und das lineare Gleichungssystem

$$XU = V \quad (4.35)$$

lösen. Dieser Ansatz ist numerisch allerdings mit Vorsicht zu verwenden, insbesondere wenn  $H$  fast defektive Eigenwerte besitzt, da dann die Eigenvektorberechnung schlecht konditioniert ist.



**Algorithmus 4.18 (Schurvektormethode)**INPUT:  $A, G, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G = G^T$ ,  $Q = Q^T$ .OUTPUT: Stabilisierende Lösung  $X_*$  der ARE (4.28).

1: Berechne die Schur-Zerlegung

$$\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} W = W \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ 0 & H_{22} \end{bmatrix}, \quad \Lambda(H_{11}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

mit der Sortierung wie in (4.30) (existiert nach Satz 3.11).

2: **if**  $\exists j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0$  **then**

3: STOP; es existiert keine stabilisierende Lösung von (4.28).

4: **end if**5: Partitioniere  $W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$  mit  $W_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .6:  $X_* := W_{21}W_{11}^{-1}$ .

Numerisch stabiler ist die in Algorithmus 4.18 beschriebene Methode, die auf Laub (1979) [18] zurückgeht.

Die Schurvektormethode ist numerisch rückwärts stabil, falls  $\|X_*\|_2 \approx 1$ . Dies kann man meist durch eine geeignete Skalierung  $\tilde{\mathcal{R}}(X) = \mathcal{R}(\gamma X)$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}^+$ , erreichen. Die Kosten betragen ca.  $205n^3$  Flops.

Der Nachteil der Methode besteht darin, daß sie die Hamiltonische Struktur von  $H$  ignoriert. In endlicher Arithmetik gilt daher (4.30) i.a. nicht mehr. D.h., wenn  $\tilde{\lambda}$  ein numerisch berechneter Eigenwert von  $H$  ist, so ist  $-\tilde{\lambda}$  i.a. nicht im berechneten Spektrum enthalten. Damit besteht die Möglichkeit daß mehr oder weniger als  $n$  berechnete Eigenwerte in der linken Halbebene liegen und damit eine stabilisierende Lösung mit der Schurvektormethode nicht berechnet werden kann.

Dieses Problem könnte vermieden werden, wenn  $W$  in der Schurzerlegung von  $H$  so gewählt werden könnte, daß die Schurform wieder Hamiltonisch ist, d.h.

$$H_{22} = -H_{11}^T, \quad H_{12} = H_{12}^T,$$

wobei  $H_{11}$  reelle Schurform hat. Eine solche Schurform heißt *Hamiltonische Schurform* und man kann zeigen, daß eine solche Form selbst unter schwächeren Voraussetzungen als den hier vorliegenden existiert [22, 19]. Allerdings gibt es bislang keinen numerisch stabilen Algorithmus zur Berechnung der Hamiltonischen Schurform allgemeiner Hamiltonischer Matrizen, der mit einem vertretbaren numerischen Aufwand auskommt. Einige Algorithmen, die versuchen, die Symmetrie des Spektrums Hamiltonischer Algorithmen zu erhalten, sind im Folgenden kurz beschrieben.

**SR Algorithmus** [5] Berechnet eine kondensiertere Form als die Hamiltonische Schurform, verwendet aber nicht-orthogonale Ähnlichkeitstransformationen und ist deshalb nicht numerisch rückwärts stabil.

**Signumfunktionsmethode** [25, 7] Berechnet iterativ einen Projektor auf den gesuchten  $H$ -invarianten Unterraum und extrahiert daraus die Lösung der ARE, hat allerdings Konvergenzprobleme bei Eigenwerten nahe der imaginären Achse, da die Signumfunktion von  $H$  nicht definiert ist, wenn  $H$  rein-imaginäre Eigenwerte hat.

**Hamiltonischer QR Algorithmus** [6] Berechnet die Hamiltonische Schurform mit einem strukturerhaltenden QR Algorithmus, ist aber nur effizient, (d.h.  $\mathcal{O}(n^3)$  Rechenoperationen), wenn  $\text{Rang}(G) = 1$  oder  $\text{Rang}(Q) = 1$ .

**Multishift-Algorithmus** [2, 1] Berechnet eine Hamiltonische Block-Schurform, d.h.  $H_{11}$  ist nicht in Schurform, aber  $\Lambda(H_{11}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ . Allerdings gibt es hier Probleme mit der Konvergenz für steigendes  $n$ , so daß der Algorithmus nur für  $n < 100$  sinnvoll eingesetzt werden kann.

**Hamiltonischer Jacobi-Algorithmus** [8, 4] Berechnet die Hamiltonische Schurform, allerdings ist die Konvergenz der Jacobi-Iteration meist viel zu langsam, so daß der Algorithmus ebenfalls nicht effizient ist.

**Einbettungsalgorithmus** [3] Überführt das Hamiltonische Eigenwertproblem in ein Hamiltonisches Eigenwertproblem doppelter Größe mit zusätzlicher Struktur, für die die Hamiltonische Schurform strukturerhaltend und effizient ausgerechnet werden kann. Aus dem stabilen invarianten Unterraum der Hamiltonischen Matrix in  $\mathbb{R}^{4n \times 4n}$  kann man die Lösung der ARE berechnen.

Ein völlig anderer Ansatz liegt darin, die ARE (4.28) als ein Nullstellenproblem für die nichtlineare Funktion  $\mathcal{R}(X)$  aufzufassen. Dazu bietet es sich an, das Newtonverfahren anzuwenden, wobei man sicherstellen muß, daß man gegen die richtige Lösung konvergiert. Dies kann man aber recht leicht erreichen, wie wir im Folgenden sehen werden. Das Newtonverfahren für ein gegebenes  $X_0 = X_0^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  besteht aus der Iteration

$$X_{k+1} = X_k - (\mathcal{R}'_{X_k})^{-1}(\mathcal{R}(X_k)), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.36)$$

Hierbei ist  $\mathcal{R}'_X$  die Fréchet-Ableitung von  $\mathcal{R}$  in Richtung  $X$ . Diese ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'_X(Z) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\mathcal{R}(X + tZ) - \mathcal{R}(X)) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (Q + A^T(X + tZ) + (X + tZ)A^T - (X + tZ)G(X + tZ) - \\ &\quad - (Q + A^T X + XA - XGX)) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (tA^T Z + tZA - tXGZ - tZGX - t^2ZGZ) \\ &= (A - GX)^T Z + Z(A - GX). \end{aligned}$$

Definiert man  $N_k := -(\mathcal{R}'_{X_k})^{-1}(\mathcal{R}(X_k))$ , so folgt, daß  $N_k$  die Lyapunovgleichung

$$(A - GX_k)^T N_k + N_k(A - GX_k) = -\mathcal{R}(X_k) \quad (4.37)$$

löst. Die Lösung von (4.37) kann man z.B. mit dem Bartels-Stewart Algorithmus (Algorithmus 3.12) berechnen.

Unter der Annahme, daß die Iteration (4.36) gegen  $\hat{X}$  konvergiert und daß alle Iterierten  $\Lambda(A - GX_k) \subset \mathbb{C}^-$  erfüllen, folgt  $\Lambda(A - G\hat{X}) \subset \mathbb{C}^- \cup i\mathbb{R}$ . Hat die zugehörige Hamiltonische Matrix aber keine Eigenwerte auf der imaginären Achse, so muß  $\Lambda(A - G\hat{X}) \subset \mathbb{C}^-$  gelten, d.h.  $\hat{X} = X_*$  muß die stabilisierende Lösung sein. Die Konvergenz des Newtonverfahrens für die ARE (4.28) ist in folgendem Satz zusammengefaßt.

**Satz 4.19** *Es sei  $G \geq 0$ ,  $(A, G)$  stabilisierbar und es existiere die stabilisierende Lösung  $X_*$  der ARE (4.28). Ist  $X_0 = X_0^T$  so gewählt, daß  $\Lambda(A - GX_0) \subset \mathbb{C}^-$ , dann gilt für die durch (4.36) erzeugte Folge  $\{X_k\}_{k=0}^\infty$ :*

(i) *Alle  $X_k$  sind stabilisierend, d.h.  $\Lambda(A - GX_k) \subset \mathbb{C}^-$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ .*

(ii)  *$X_* \leq \dots \leq X_{j+1} \leq X_j \leq \dots \leq X_1$ .*

(iii)  *$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X_*$ .*

(iv) *Es existiert eine Konstante  $\gamma > 0$ , so daß*

$$\|X_{k+1} - X_*\| \leq \gamma \|X_k - X_*\|^2, \quad k \geq 1,$$

*d.h. die  $X_k$  konvergieren quadratisch.*

**Beweis:** Siehe [16].  $\square$

Die Kosten des Newtonverfahrens hängen natürlich von der Anzahl der benötigten Iterationen ab. Man kann hier verschiedene Abbruchkriterien verwenden, z.B.

$$\begin{aligned} \|X_{k+1} - X_k\| &\leq \tau \cdot \|X_k\|, \\ \|\mathcal{R}(X_k)\| &\leq \tau \end{aligned}$$

für eine vorgegebene Fehlertoleranz  $\tau$ . Bei 6–7 Iterationen entsprechen die Kosten in etwa den Kosten der Schurvektormethode. Oft werden aber mehr Iterationen benötigt, so daß man das Newtonverfahren meist nur zur Verbesserung einer mit einem anderen Verfahren berechneten Näherungslösung einsetzt. Mindestens ein Schritt des Newtonverfahrens sollte immer angewendet werden, da man mit dem Newtonverfahren den kleinstmöglichen relativen Fehler

$$\frac{\|X_* - \tilde{X}\|}{\|X_*\|} \approx \mathbf{u} \cdot \kappa_{ARE}$$

erreichen kann. Hierbei ist  $\tilde{X}$  die mit dem Newtonverfahren berechnete Näherungslösung und  $\kappa_{ARE}$  die Kondition der ARE.