Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. T. Stykel

Sommersemester 2009

20.05.2009

Kontrolltheorie

3. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblattes in der Übung am 27.05.2009

Aufgabe 1: (Stabilisierbare, aber nicht steuerbare Steuerungsprobleme)

Konstruiere ein Steuerungsproblem $\dot{x} = Ax + Bu$ mit $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, $B \in \mathbb{R}^2$, welches nicht steuerbar ist, aber stabilisierbar.

Aufgabe 2: (Systemtransformationen)

Betrachte das LTI System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass die Steuerbarkeit und die Stabilisierbarkeit invariant sind bzgl. der linearen Zustandsrückführung $u \mapsto -Fx + v$ mit $F \in \mathbb{R}^{m,n}$.

(b) Zeige, dass die Beobachtbarkeit und die Entdeckbarkeit invariant sind bzgl. der linearen Ausgangsrückführung $u \mapsto -Gy + v$ mit $G \in \mathbb{R}^{m,p}$.

Aufgabe 3: (Kronecker-Produkt)

Seien $Y \in \mathbb{R}^{j\times k}$ und $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann heißt die $mj \times kn$ Matrix

$$Y \otimes Z = \begin{bmatrix} y_{11}Z & y_{12}Z & \dots & y_{1k}Z \\ y_{21}Z & y_{22}Z & \dots & y_{2k}Z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{j1}Z & y_{j2}Z & \dots & y_{jk}Z \end{bmatrix}$$

das *Kronecker-Produkt* oder *Tensor-Produkt* von Y und Z.

a) Seien W, X, Y, Z Matrizen geeigneter Dimension, so dass die Produkte WX und YZ definiert sind. Zeige $(W \otimes Y)(X \otimes Z) = (WX) \otimes (YZ)$.

b) Seien S, G invertierbare Matrizen. Zeige, dass auch $S \otimes G$ invertierbar ist und dass $(S \otimes G)^{-1} = S^{-1} \otimes G^{-1}$.

c) Zeige, wenn A und B, sowie C und D ähnliche Matrizen sind, dann sind auch $A \otimes C$ und $B \otimes D$ ähnlich.

d) Seien $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m,m}$. Die Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und B habe die Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_m$. Zeige, dass

$$\mathrm{Sp}(A \otimes B) = \{\lambda_i \mu_j \,|\, i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, m\}.$$

Aufgabe 4: (Sylvester-Gleichung)

Seien $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{m,m}$ und $W \in \mathbb{R}^{n,m}$. Die Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und B habe die Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_m$. Für $X = [\,x_1,\ x_2, \cdots, x_m\,] \in \mathbb{R}^{n,m}$ sei $\mathrm{vec}(X) = [\,x_1^T,\ x_2^T, \cdots, x_m^T\,]^T \in \mathbb{R}^{nm}$ der Vektor, den man erhält, falls man die Spaltenvektoren $x_1, \dots, x_m$ der Reihe nach untereinander anordnet.

a) Zeige, dass die Sylvester-Gleichung $AX + XB = -W$ äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem $Mx = w$ ist, wobei

$$M = I_m \otimes A + B^T \otimes I_n, \quad x = \mathrm{vec}(X), \quad w = -\mathrm{vec}(W). \tag{1}$$

(I_p ist die $p \times p$ Einheitsmatrix.)

b) Zeige, dass die Sylvester-Gleichung $AX + XB = -W$ genau dann eine eindeutige Lösung hat, wenn A und $-B$ keine gemeinsamen Eigenwerte haben.

c) Zeige, dass die Sylvester-Gleichung $AX + XB = -W$ mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{m,m}$, $W \in \mathbb{R}^{n,m}$ genau dann eine Lösung X hat, wenn die Matrizen

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & W \\ 0 & -B \end{bmatrix}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{bmatrix}$$

ähnlich sind.