Technische Universität Berlin Sommersemester 2009
Institut für Mathematik
Dr. T. Stykel 17.06.2009

Kontrolltheorie

5. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblattes in der Übung am 24.06.2009

Aufgabe 1: (Partielle Stabilisierung)

Es sei $(A, B) \in \mathbb{R}^{n,n} \times \mathbb{R}^{n,m}$ und n sehr groß, also $n > 1000$. Oft sind nur wenige Eigenwerte (*Pole des Systems*) von A instabil, haben also nicht-negativen Realteil. Deshalb ist es eigentlich nicht notwendig, das gesamte System zu stabilisieren — es reicht, die instabilen Pole durch eine Zustandsrückführung in die offene linke Halbebene zu bringen. Nehme dazu an, dass

$$\mathrm{Sp}(A) = \Lambda_- \cup \Lambda_+ \quad \text{mit} \quad \Lambda_- = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}, \;\; \Lambda_+ = \{\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n\},$$

wobei $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$ für $j = 1, \ldots, k$ und $\mathrm{Re}(\lambda_j) \geq 0$ für $j = k + 1, \ldots, n$.

a) Entwickle einen Algorithmus zur partiellen Stabilisierung basierend auf der Schur-Form von A. Der Algorithmus soll also $F \in \mathbb{R}^{m,n}$ so berechnen, dass

$$\Lambda(A - BF) = \Lambda_- \cup \{\mu_{k+1}, \ldots, \mu_n\}, \quad \mathrm{Re}(\mu_j) < 0.$$

b) Partielle Stabilisierung läßt sich auch mit Hilfe der *Signumfunktions-Methode* durchführen. Sei dazu $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ und

$$A = S \begin{bmatrix} J_- & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix} S^{-1}, \qquad \mathrm{Sp}(J_-) = \Lambda_-, \quad \mathrm{Sp}(J_+) = \Lambda_+,$$

die Jordan-Normalform von A. Dann ist

$$\mathrm{sign}(A) := S \begin{bmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} S^{-1}.$$

(i) Zeige: Für jede invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt: $\mathrm{sign}(TAT^{-1}) = T\mathrm{sign}(A)T^{-1}$.

(ii) Zeige: $P_- = \frac{1}{2}(I - \mathrm{sign}(A))$ ist ein Projektor auf $\mathcal{S}_-$, den A-invarianten Unterraum zu Λ_-, d.h., $P_-^2 = P_-$ und $\mathrm{Bild}(P_-) = \mathcal{S}_-$. Was ist der Rang von P_-?

(iii) Sei

$$P_- = QR\,\Pi = Q \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Pi$$

eine QR Zerlegung mit Spaltenpivotisierung von P_-, d.h. $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist orthogonal, $R_1 \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ist reguläre obere Dreiecksmatrix, und Π ist eine Permutationsmatrix. Zeige:

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{Sp}(A_1) = \Lambda_-, \quad \mathrm{Sp}(A_2) = \Lambda_+.$$

(iv) Seien $G \in \mathbb{R}^{n,n}$, $H \in \mathbb{R}^{m,m}$, $W \in \mathbb{R}^{n,m}$ mit $\mathrm{Sp}(G), \mathrm{Sp}(H) \subset \mathbb{C}^+$. Zeige:

$$\operatorname{sign}\left(\begin{bmatrix} G & W \\ 0 & -H \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} I_n & 2X \\ 0 & -I_m \end{bmatrix},$$

wobei X die Lösung der Sylvester-Gleichung $GX + XH = W$ ist.

(v) Es gilt $\operatorname{sign}(A) = \lim_{k\to\infty} A_k$, wobei

$$A_0 := A, \qquad A_{k+1} = \frac{1}{2}(A_k + A_k^{-1}), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

(vi) Entwickle einen Algorithmus zur partiellen Stabilisierung basierend auf (iii) und (iv).

Aufgabe 2: (Eigenvektoren und Polvorgabe)

Sei $(A, b) \in \mathbb{R}^{n,n} \times \mathbb{R}^{n,1}$ ein steuerbares System. Sei $\Lambda = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ abgeschlossen unter komplexer Konjugation und sei $f \in \mathbb{R}^{1,n}$ eine Rückführungsmatrix, so dass $\mathrm{Sp}(A - bf) = \Lambda$. Zeige:

a) Ist $\lambda \in \Lambda \cap \mathrm{Sp}(A)$, dann ist jeder Eigenvektor von A zum Eigenwert λ auch Eigenvektor von $A - bf$ zum Eigenwert λ.

b) Ist $\lambda \in \Lambda \setminus \mathrm{Sp}(A)$, dann ist $(A - \lambda I)^{-1}b$ Eigenvektor von $A - bf$ zum Eigenwert λ.

Hinweis: Regler-Normalform.