Technische Universität Berlin Sommersemester 2009
Institut für Mathematik
Dr. T. Stykel 1.07.2009

Kontrolltheorie

6. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblattes in der Übung am 8.07.2009

Aufgabe 1: (Hamiltonische Matrizen)

Sei $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{2n,2n}$ und es bezeichne $J := J_{2n}$ die Matrix

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Zeige: Folgende Aussagen sind äquivalent.

(i) Die Matrix $\mathcal{H}$ ist Hamiltonisch, d.h., $\mathcal{H}J = (\mathcal{H}J)^T$.

(ii) Es gilt $\mathcal{H}^T J + J\mathcal{H} = 0$.

(iii) Die Matrix $J\mathcal{H}$ ist symmetrisch.

(iv) Es gibt $F, G, H \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $G = G^T$ und $H = H^T$, so dass

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} F & G \\ H & -F^T \end{bmatrix}.$$

(v) Die Matrix $\mathcal{H}$ ist schief-adjungiert bzgl. des indefiniten inneren Produktes

$$\langle x, y\rangle_J := y^T J x, \qquad x, y \in \mathbb{R}^{2n},$$

d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$ gilt:

$$\langle \mathcal{H}x, y\rangle_J = -\langle x, \mathcal{H}y\rangle_J$$

Aufgabe 2: (Isotrope invariante Unterräume)

Sei $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{2n,2n}$ Hamiltonisch und sei

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,r}$$

mit $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{n,r}$, so dass die Spalten von X einen $\mathcal{H}$-invarianten Unterraum $\mathcal{U}$ aufspannen, d.h., es gilt

$$\mathcal{H}X = XZ$$

für eine Matrix $Z \in \mathbb{R}^{r,r}$. Zeige: Liegen die zu $\mathcal{U}$ gehörigen Eigenwerte in der linken offenen Halbebene (d.h. $\mathrm{Sp}(Z) \subset \mathbb{C}^-$), so ist $\mathcal{U}$ *isotrop*, d.h. für alle $x, y \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\langle x, y\rangle_J = 0.$$

Hinweis: Lyapunov-Theorie.

Aufgabe 3: (Hamiltonische und symplektische Matrizen)

Eine Matrix $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{2n,2n}$ heißt *symplektisch*, falls $\mathcal{S}$ orthogonal bzgl. des inneren Produktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ ist, d.h., für alle $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$ gilt:

$$\langle \mathcal{S}x, \mathcal{S}y \rangle_J = \langle x, y \rangle_J.$$

a) Zeige:

   (i) Die Matrix $\mathcal{S}$ ist genau dann symplektisch, wenn $\mathcal{S}^T J \mathcal{S} = J$.

   (ii) Es gilt $|\det(\mathcal{S})| = 1$.

   (iii) Die Menge der symplektischen Matrizen $\mathbb{S}_{2n}$ mit der Matrixmultiplikation ist eine Gruppe.

b) Sei $\mathbb{H}_{2n}$ die Menge der Hamiltonischen Matrizen und sei $\mathbb{S}_{2n}$ die Menge der symplektischen Matrizen. Zeige:

   (i) Es gilt $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{H}\mathcal{S} \in \mathbb{H}_{2n}$ für alle $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{2n}, \mathcal{H} \in \mathbb{H}_{2n}$.

   (ii) Falls $\mathcal{H} \in \mathbb{H}_{2n}$ keine rein imaginären Eigenwerte hat, dann gibt es eine komplex symplektische Matrix $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{2n}(\mathbb{C}) = \{ \mathcal{S} \in \mathbb{C}^{2n,2n} \ : \ \mathcal{S}^* J \mathcal{S} = J \}$, so dass

   $$\mathcal{S}^{-1}\mathcal{H}\mathcal{S} = \begin{bmatrix} J_- & 0 \\ 0 & -J_-^* \end{bmatrix}$$

   und $J_- \in \mathbb{C}^{n,n}$ ist in Jordan-Normalform mit $\mathrm{Sp}(J_-) \subset \mathbb{C}^-$.