Technische Universität Berlin SS 2009
Fakultät II – Institut für Mathematik Ausgabe: 28. 4. 2009
Prof. Dr. Jürgen Gärtner/Dr. Noemi Kurt Abgabe: 5. 5. 2009

3. Übung

zur Maß- und Integrationstheorie

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

(a) Zeigen Sie: Für eine beliebige $\sigma-$Algebra $\mathfrak{A}$ gelten:

$$(i)\, \emptyset \in \mathfrak{A}; \quad (ii)\, A_1, A_2, ... \in \mathfrak{A} \Rightarrow \cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}; \quad (iii)\, A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \setminus B \text{ und } A \Delta B \in \mathfrak{A}$$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Vereinigung zweier $\sigma-$Algebren ist wieder eine σ-Algebra.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

(a) Es seien $\mu_n, n \in \mathbb{N}$, Maße auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$. Zeigen Sie, dass für jede Folge von nichtnegativen Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Linearkombination

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n$$

wieder ein Maß ist.

(b) Es sei X eine abzählbare Menge. Zeigen Sie, dass eine Funktion

$$\mu : \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$$

genau dann ein Maß auf $\mathfrak{P}(X)$ ist, wenn

$$\mu = \sum_{x \in X} \alpha_x \delta_x$$

mit $\alpha_x \in [0, \infty]$ gilt.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Beweisen Sie den **Satz von Ulam:**
Sei Ω eine Menge der Mächtigkeit $\aleph_1$ und μ ein endliches Maß auf der Potenzmenge von Ω mit $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \Omega$. Dann ist $\mu(A) = 0$ für alle $A \subseteq \Omega$.

Hinweis: Benutzen Sie die Resultate aus der Übungsstunde (siehe Rückseite), und zeigen Sie, dass in jeder Zeile der dort behandelten Tabelle nur abzählbar viele Mengen F_x^n existieren mit $\mu(F_x^n) > 0$. Weisen Sie nach, dass es eine Spalte gibt, so dass alle Mengen aus dieser Spalte das μ-Maß Null haben.

Bitte wenden!

Resultat aus der Übungsstunde
Sei Ω eine Menge der Mächtigkeit $\aleph_1$. Sei $<$ eine Wohlordnung auf Ω derart, dass für jedes $y \in \Omega$ der y-Abschnitt $\Omega_y := \{x \in \Omega : x < y\}$ abzählbar ist. Zu $y \in \Omega$ sei $f(\cdot, y) : \Omega_y \to \mathbb{N}$ eine injektive Abbildung. ($f(x, y)$ ist also für alle $x, y \in \Omega$ mit $x < y$ definiert.) Wir setzen zu $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \Omega$

$$F_x^n := \{y : x < y, f(x, y) = n\}$$

und schreiben diese Mengen in Form einer Tablle auf:

$$\begin{array}{ccccc}
F_{x_1}^1 & F_{x_2}^1 & \dots & F_x^1 & \dots \\
F_{x_1}^2 & F_{x_2}^2 & \dots & F_x^2 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
F_{x_1}^n & F_{x_2}^n & \dots & F_x^n & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Diese Tabelle besitzt $\aleph_0$ Zeilen und $\aleph_1$ Spalten. In der Uebungsstunde wurde gezeigt:

1. Die Mengen jeder Zeile sind paarweise disjunkt.

2. Die Vereinigung der Mengen jeder Spalte ist gleich Ω minus einer abzählbaren Menge.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**
Beweisen Sie, dass unter der Annahme der Kontinuumhypothese kein Maß auf der Potenzmenge von $\mathbb{R}^d$ existiert, welches achsenparallelen Quadern ihr Elementarvolumen zuordnet.

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte