Technische Universität Berlin SS 2009
Fakultät II – Institut für Mathematik Ausgabe: 5. 5. 2009
Prof. Dr. Jürgen Gärtner/Dr. Noemi Kurt Abgabe: 12. 5. 2009

4. Übung

zur Maß- und Integrationstheorie

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie

(a) Für beliebige $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(b) Ist in (a) zusätzlich $\mu(A) < \infty$, dann gilt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(c) Sind $A, B \in \mathcal{A}$ beliebig und gilt $\mu(A) < \infty$ oder $\mu(B) < \infty$, so ist $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \Delta B)$.

(d) Für eine beliebige Folge $\mathcal{A}-$messbarer Mengen A_n gilt $\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Beweisen Sie die folgende Behauptung (cf. Beispiel 3.13.3 des Skriptes):

(a) Die $\sigma-$Algebra der Borelschen Teilmengen der reellen Achse wird von folgenden Intervallen erzeugt, wobei x jeweils die reellen Zahlen durchläuft:

1. $(-\infty, x)$;
2. $(-\infty, x]$;
3. (x, ∞);
4. $[x, \infty)$.

(es genügt, einen der obigen Fälle zu behandeln).

(b) Zeigen Sie, dass die $\sigma-$Algebra der Borelmengen des $\mathbb{R}^d$ von folgenden Mengensystemen erzeugt wird:

1. System aller abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$;
2. System aller kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$;
3. System aller achsenparalleler Quader.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$ regulär ist, das heißt, dass für jede Lebesgue-messbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ gelten

(a) $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) | U \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offen}, A \subseteq U\}$; (äußere Regularität)

(b) $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) | K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ kompakt}, K \subseteq A\}$. (innere Regularität)

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für Teilmengen des Einheitswürfels $[0, 1]^d$.

Bitte wenden.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Wir definieren eine Folge von Teilmengen $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des Intervalls $[0,1]$ via $C_0 := [0,1], C_1 := [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1], C_2 := [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1], ...$ Anschaulich gesprochen erhalten wir also das Folgenglied C_{n+1} aus C_n, indem wir aus den abgeschlossenen Intervallen, deren paarweise disjunkte Vereinigung C_n ist, jeweils das mittlere offene Drittel herausnehmen. Wir definieren nun die *Cantormenge* $\mathcal{C} := \cap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ (siehe auch Skript, Beispiel 10.11.4, S. 137 ff.). Zeigen Sie

(a) $\mathcal{C}$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$;

(b) $\mathcal{C}$ ist nirgends dicht; das heißt, der Abschluss $\overline{\mathcal{C}}$ hat keine inneren Punkte;

(c) $\mathcal{C}$ ist perfekt; das heißt, $\mathcal{C}$ ist gleich der Menge der Häufungspunkte von $\mathcal{C}$; (Ein Punkt $x \in [0,1]$ heißt Häufungspunkt von $\mathcal{C}$, falls jede Umgebung von x einen Punkt $y \in \mathcal{C}$ mit $y \neq x$ enthält).

(d) $\lambda(\mathcal{C}) = 0$.

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte