Technische Universität Berlin SS 2009
Fakultät II – Institut für Mathematik Ausgabe: 26. 5. 2009
Prof. Dr. Jürgen Gärtner/Dr. Noemi Kurt Abgabe: 2. 6. 2009

7. Übung

zur Maß- und Integrationstheorie

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Es sei f eine *nichtnegative* messbare numerische Funktion auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $\mu(\Omega) < \infty$. Zeigen Sie:

(a) Nimmt die Funktion f nur ganzzahlige Werte an, so gilt $\int_\Omega f\, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \mu(f \geq n)$.

(b) Die Funktion f (nicht notwendigerweise ganzzahlig) ist genau dann $\mu-$integrierbar, wenn $\sum_{n=1}^\infty \mu(f \geq n) < \infty$ gilt.

(c) Ist f $\mu-$integrierbar, so folgt $\lim_{x\to\infty} x\mu(f \geq x) = 0$.

Treten Probleme auf, falls $\mu(\Omega) = \infty$?

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Es seien $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Wir definieren $\nu := \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \nu_n$, was wiederum ein Maß ist. Zeigen Sie, dass für alle nichtnegativen messbaren numerischen Funktionen $f\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ gilt:

$$\int_\Omega f d\nu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f\, d(\alpha_n \nu_n).$$

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass man im Lemma von Fatou lim inf nicht durch lim sup ersetzen kann.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass die Existenz einer oberen μ-integrierbaren Schranke g im Satz über die majorisierte Konvergenz hinreichend aber nicht notwendig ist.

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte