TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 09

Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozent: Gärtner
Assistent: Drewitz

Abgabe: 01.07. vor der Übung

10. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie 1

(Markovprozesse)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Zeige, dass für $n \geq 2$ das Gleichungssystem

$$\frac{1}{2}(f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}) = -1$$

mit den Randbedingungen $f_0 = f_n = 0$ die eindeutige Lösung $f_k = k(n-k)$ hat.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $X_1, X_2, X_3, \dots$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit $P(X_1 = 1) = p \in (0,1)$ und $P(X_1 = -1) = 1 - p$. Ferner seien $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ und $M_n := \max\{S_k : 0 \leq k \leq n\}$.

(a) Zeige, dass S_n und $Y_n := M_n - S_n$ Markovketten sind und bestimme ihre Zustandsräume sowie ihre Übergangsmatrizen.

(b) Zeige, dass $M_n = Y_n + S_n$ keine Markovkette ist (d.h., dass die Summe zweier Markovketten i.a. keine Markovkette ist).

3. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei P die Übergangsmatrix einer Markovkette auf dem Zustandsraum I sowie π eine für diesen Prozess stationäre Anfangsverteilung. Zeige, dass der durch

$$P : L^2(I, \pi) \ni f \mapsto \sum_x P(\cdot, x) f(x) \in L^2(I, \pi)$$

induzierte Operator eine Kontraktion auf $L^2(I,\pi)$ in dem Sinne ist, dass

$$\sum_{x\in I}(Pf(x))^2\pi(x) \leq \sum_{x\in I}(f(x))^2\pi(x)$$

gilt.

4. Aufgabe (5 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir das Ehrenfest-Modell, d.h. eine Markovkette mit Zustandsraum $S = \{0,\dots,N\}$, $N \in \mathbb{N}$ und Übergangsmatrix $P = \big(p(i,j)\big)_{i,j\in S}$, wobei

$$p(i,i+1) = \frac{N-i}{N}, \quad p(i,i-1) = \frac{i}{N}.$$

(a) Zeige, dass die Binomialverteilung mit Parametern N und $\frac{1}{2}$ eine invariante Verteilung (ab jetzt mit π bezeichnet) für diese Markovkette ist.

(b) Zeige, dass keine der Zeilen der n-Schritt Übergangsmatrix P^n für $n \to \infty$ gegen π konvergiert. Was ist der Grund dafür?

(c) Betrachte nun die Markovkette mit Übergangsmatrix $Q := qI_{N+1} + (1-q)P$. Dabei ist P wie oben, $q \in (0,1)$ und I_{N+1} ist die $(N+1)\times(N+1)$ Einheitsmatrix. Zeige, dass π die eindeutige invariante Verteilung der Markovkette ist, und dass jede Zeile von Q^n für $n \to \infty$ gegen die Einzelwahrscheinlichkeiten von π konvergiert.

Gesamtpunktzahl: 20