TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 09
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozent: Gärtner
Assistent: Drewitz

Abgabe: 20.05. vor der Übung

4. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie 1

(Unabhängigkeit, Verteilungen)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei X eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsgröße derart, dass $0 < P(X \geq n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sowie

$$P(X \geq n + i | X \geq n) = P(X \geq i) \quad \forall i, n \in \mathbb{N}_0$$

gelte. Zeige, dass X dann geometrisch verteilt mit einem Parameter $p \in (0, 1)$ ist und bestimme p.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige exponentialverteilte Zufallsgrößen. Zeige, dass für $Y_n := \max_{1 \leq i \leq n} X_i - \log n$ die Funktion

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto P(Y_n \leq x)$$

punktweise gegen eine nichttriviale Grenzfunktion konvergiert.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig identisch verteilte Zufallsgrößen sowie $A \subseteq \mathbb{R}$ Borel-messbar derart, dass $0 < P(X_1 \in A) < 1$ gilt. Wir fixieren $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ und es bezeichne E_J das Ereignis, dass die Elemente von J die $|J|$ kleinsten Indizes $k \in \{1, \ldots, n\}$ derart sind, dass $X_k \in A$. Mit anderen Worten ist E_J das Ereignis, dass für $J = \{j_1, \ldots, j_r\}$ mit $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$ sowohl $X_k \in A$ für alle $k = j_1, \ldots, j_r$ als auch $X_k \notin A$ für alle anderen $k < j_r$ gilt.
Zeige, dass

(i) $\sum_{k\in J} X_k$ und $\sum_{k\in\{1,\ldots,n\}\setminus J} X_k$ unabhängig sind.

(ii) $\sum_{k\in J} X_k$ und $\sum_{k\in\{1,\ldots,n\}\setminus J} X_k$ bedingt auf E_J, d.h. bezüglich des Maßes $P(\cdot|E_J)$, unabhängig sind.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei X eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion. Nimm Stellung zu der Aussage: „Durch die Abbildung $Y := F_X(X)$ ist eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable gegeben.“

Wie sieht der Sachverhalt aus, wenn die Verteilungsfunktion Unstetigkeitsstellen hat?

Gesamtpunktzahl: 20