

Abgabe: 27.05. vor der Übung

## 5. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie 1

(Verteilungen, Erwartungswerte)

---

### Hausaufgaben

#### 1. Aufgabe

(4 Punkte)

Für  $a, m \in \mathbb{R}$  sei die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus [m-5, m+5] \\ a(x-m+5) & x \in [m-5, m] \\ -a(x-m-5) & x \in [m, m+5] \end{cases} .$$

Bestimmen Sie  $a$  und  $m$ , sodass  $f$  Dichte einer Zufallsvariablen ist. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion sowie den Erwartungswert dieser Zufallsvariablen. Skizzieren Sie die Dichte und die Verteilungsfunktion.

#### 2. Aufgabe

(5 Punkte)

Es sei  $Z$  eine auf  $(0, 1)$  gleichverteilte Zufallsgröße sowie  $F$  die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße. Zeige, dass die Zufallsgröße  $F^{-1}(Z)$  die Verteilungsfunktion  $F$  hat. Hierbei bezeichne

$$F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \inf\{y \in \mathbb{R} : F(y) \geq x\}$$

die verallgemeinerte Inverse.

#### 3. Aufgabe

(6 Punkte)

- (a) Berechnen Sie den Erwartungswert einer Poisson-verteilten Zufallsvariable mit Parameter  $\rho > 0$ .

- (b) Für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  sei  $X_n \sim \text{Bin}(n, \rho/n)$ , d.h.  $X_n$  ist eine binomial verteilte Zufallsvariable mit Parametern  $n$  und  $\rho/n$ . Ferner sei  $X$  Poisson-verteilt mit Parameter  $\rho$ . In der Vorlesung wurde gezeigt

$$P(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(X = k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Beweisen Sie:  $EX_n \rightarrow EX$  für  $n \rightarrow \infty$ .

- (c) Modifizieren Sie die Verteilung der  $X_n$  aus (b) so, dass zwar (1) gilt, aber  $EX_n$  nicht gegen  $EX$  konvergiert.

#### 4. Aufgabe

(5 Punkte)

Es seien  $X, Y$  Zufallsgrößen sowie  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Borel-messbare Funktionen. Zeige:

- (a) Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig, so sind auch  $f(X)$  und  $g(Y)$  unabhängig.  
 (b) Sind  $X$  und  $Y$  unkorreliert und  $E(f(X)^2)$  und  $E(g(Y)^2)$  endlich, so sind  $f(X)$  und  $g(Y)$  nicht notwendigerweise unkorreliert.

**Auf Grund vielfachen Wunsches wurden einige der Sprechstunden näher an die nächste Übungsabgabe gelegt:**

	Büro	Sprechzeit	Tel.	email
Prof. Dr. J. Gärtner	MA 775	Mi 12:15-14:00	314 25061	jg@math.tu-berlin.de
Alexander Drewitz	MA 763	Mi 14:45-16:15	314 23606	drewitz@math.tu-berlin.de
Moritz Biskamp	MA 849	Mo 14:00-16:00	-	biskamp@math.tu-berlin.de
Julia Storm	MA 849	Mi 16:00-17:30	-	storm@math.tu-berlin.de
Simon Wasserroth	MA 849	Mo 16:00-18:00	-	wroth@pool.math.tu-berlin.de

Gesamtpunktzahl: 20