TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 09
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozent: Gärtner
Assistent: Drewitz

Abgabe: 24.06. vor der Übung

9. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie 1

(Konvergenzen, Normalverteilung, Markovprozesse)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger nichtnegativer Zufallsvariablen. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty$ f.s.,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \Big(P(X_n > 1) + E(X_n \mathbb{1}_{X_n \leq 1}) \Big) < \infty$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} E\Big(\frac{X_n}{1+X_n} \Big) < \infty$.

2. Aufgabe (5 Punkte)

(a) Es sei (X_1, X_2) ein zweidimensional normalverteilter Zufallsvektor, das heißt, dass $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ eindimensional normalverteilt ist.

Zeige, dass, falls X_1 und X_2 unkorreliert sind, X_1 und X_2 sogar unabhängig sind.

(b) Nun setzen wir nicht mehr voraus, dass (X_1, X_2) zweidimensional normalverteilt ist, sondern nur, dass X_1 und X_2 jeweils eindimensionale normalverteilte Größen sind. Gilt immer noch die Implikation, dass, falls X_1 und X_2 unkorreliert sind, X_1 und X_2 sogar unabhängig sind?

3. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $X_0, X_1, \ldots$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 1/2$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\beta \in (0,1)$ seien

$$Z_{\beta,n} = (1-\beta^2)^{1/2} \sum_{k=0}^{n} \beta^k X_k \quad \text{und} \quad Z_\beta = \lim_{n\to\infty} Z_{\beta,n}.$$

(a) Zeige, dass Z_β fast sicher endlich ist.

(b) Bestimme die charakteristische Funktion von $Z_{\beta,n}$ und von Z_β.

(c) Zeige, dass Z_β für $\beta \to 1$ in Verteilung gegen eine standardnormalverteilte Zufallsvariable konvergiert.

Anleitung zu (c): Betrachte Approximationen von $\phi_{Z_{\beta,n}}(t)$ für feste β. Lasse dann erst n gegen unendlich gehen um eine Approximation von $\phi_{Z_\beta}(t)$ zu erhalten. Schließlich kann der Grenzwert für $\beta \to 1$ bestimmt werden.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Es seien $X_0, X_1, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{Z}$. Weiter sei $Y_n := \max\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeige, dass $Y := \{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Markovkette auf $\mathbb{Z}$ ist und bestimme ihre Übergangsmatrix.

Gesamtpunktzahl: 20