Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2010

Analysis III

1.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 28. / 29. April.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Es sei Ω eine beliebige (nichtleere) Grundmenge und R ein Ring über Ω, $\mu : R \to [0, \infty]$ ein Inhalt. Zeige die folgenden Behauptungen.

(i) Sind $A, B \in R$ und $A \subset B$, so ist $\mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie des Inhalts).

(ii) Sind $A_n \in R$, $n = 1, \ldots, N$, so ist $\mu\big(\cup_{n=1}^N A_n\big) \leq \sum_{n=1}^N \mu(A_n)$. (Subadditivität des Inhalts).

(iii) Es gelte $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ für jede Folge $(A_n) \subset R$ mit $A_{n+1} \subset A_n$, $n \in \mathbb{N}$, und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Dann ist μ $\sigma-$additiv.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Es bezeichne Δ die symmetrische Differenz von Mengen, also $A\Delta B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

(a) Es seien nun A, B, C beliebige Teilmengen einer Grundmenge Ω. Zeige die folgenden Behauptungen.

(i) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

(ii) $A^c\Delta B^c = A\Delta B$.

(b) Es sei R ein Ring über einer Grundmenge Ω und μ ein Inhalt auf R. Zeige, daß

$$d(A, B) := \mu(A\Delta B), \quad A, B \in R$$

eine Halbmetrik[1] auf R definiert.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen einer nichtleeren Menge Ω. Der *obere* und *untere Mengenlimes* der Folge (A_n) wird definiert durch

$$A_* := \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_m \bigcap_{n\geq m} A_n,$$
$$A^* := \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_m \bigcup_{n\geq m} A_n.$$

(i) Zeige $A_* \subseteq A^*$ und zeige, daß Gleichheit im allgemeinen nicht gilt.

[1] Eine Halbmetrik erfüllt alle Axiome einer Metrik mit einer möglichen Ausnahme: Aus $d(A, B) = 0$ folgt nicht notwendigerweise $A = B$.

(ii) Zeige, daß für monotone Mengenfolgen (d.h. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ oder $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$) in (i) Gleichheit angenommen wird: $A_* = A^*$.[2]

(iii) Wir bezeichnen mit χ_A die *charakteristische Funktion* von A, also

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, daß $\limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x) = \chi_{A^*}(x)$ und $\liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x) = \chi_{A_*}(x)$ für alle $x \in \Omega$ gilt.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Es seien G_1, G_2 nichtleere Mengen, $\mathfrak{A}_i$ σ-Algebren über G_i, $i = 1, 2$ und $f : G_1 \to G_2$. Entscheide, welche der folgenden Mengensysteme $\mathfrak{B}_i$ σ-Algebren über Ω_i sind, $i = 1, 2, 3, 4$.

(i) $\Omega_1 := [0, \infty)$, $\quad \mathfrak{B}_1 := \{[a, b) \mid a \in [0, \infty),\ b \in (0, \infty]\}$;

(ii) $\Omega_2 := [0, \infty)$, $\quad \mathfrak{B}_2 := \{A \subseteq \Omega_2 \mid \exists n \in \mathbb{N},\ A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{B}_1, \text{mit } A = \bigcup_{i=1}^n A_i\}$;

(iii) $\Omega_3 := G_1$, $\quad \mathfrak{B}_3 := f^{-1}(\mathfrak{A}_2) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathfrak{A}_2\}$;

(iv) $\Omega_4 := G_2$, $\quad \mathfrak{B}_4 := f(\mathfrak{A}_1) = \{f(A) \mid A \in \mathfrak{A}_1\}$;

[2] In diesem Fall schreibt man $\lim A_n = A^* = A_*$. In diesem Sinne konvergieren die Folgen (A_n) aus Aufgabe 1(iii) monoton fallend gegen $\emptyset$.