Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2010

Analysis III

3.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 12. / 13. Mai

Aufgabe 1: **3 Punkte**
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ überall differenzierbar. Zeige, daß die Ableitung von f meßbar ist.

Aufgabe 2: **4 Punkte**
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative meßbare Funktion. Zeige

$$\int_\Omega f d\mu = 0 \iff f = 0 \quad \mu - \text{fast überall}$$

Aufgabe 3: **4 Punkte**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeige

(i) Ist f monoton, so ist f meßbar.

(ii) Ist f monoton, so ist f genau dann integrierbar, wenn f fast überall gleich null ist.

Aufgabe 4: **4 Punkte**
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Funktionen sind Lebesgue-integrierbar, welche nicht? Gib bei den integrierbaren den Wert des Integrals an.

(i) $f : [0, \infty) \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) = x^\alpha$,

(ii) $f : [0, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) = x^\alpha$,

(iii) $\chi_\mathbb{Q}$, $\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$, $\chi_{C\setminus\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hier sei $C \subset [0, 1]$ die Cantormenge.

Aufgabe 5: **5 Punkte**
Beweise Satz 1.42:

> Für alle Elementarfunktionen f und g und alle nichtnegativen reellen Zahlen α sind αf und $f + g$ Elementarfunktionen. Es ist
>
> (i) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$,
> (ii) $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$,
> (iii) Ist punktweise $f \leq g$, so ist $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

und Satz 1.47:

> Für alle meßbaren Funktionen $f, g : \Omega \to [0, \infty]$ und alle reellen Zahlen $\alpha \geq 0$ ist
>
> (i) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$,
> (ii) $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$,
> (iii) Ist punktweise $f \leq g$, so ist $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.